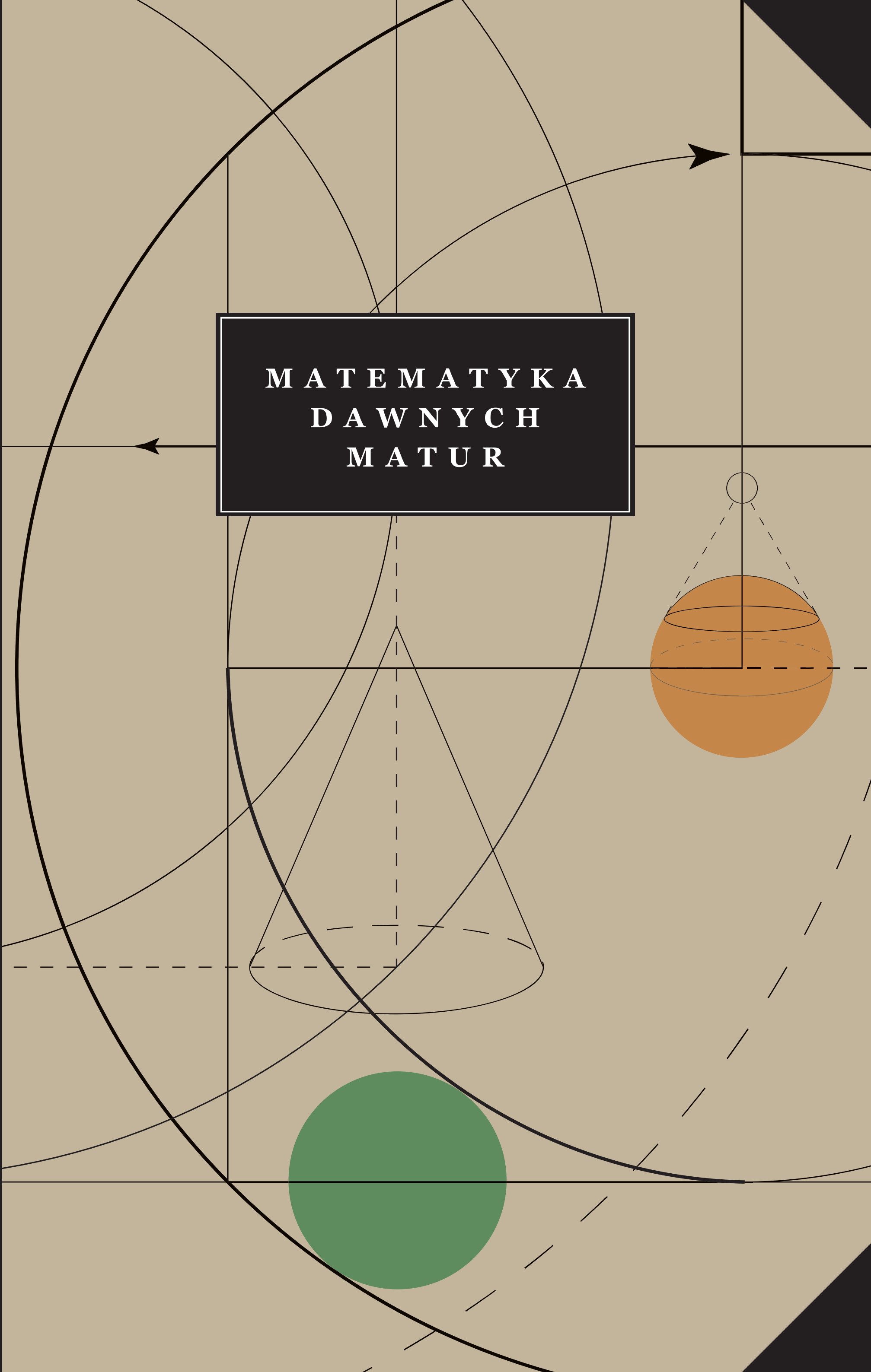


MATEMATYKA DAWNYCH MATUR

Matematyka dawnych matur

Redakcja:
dr Jędrzej Garnek, Adrianna Smolińska

Autorzy:
Cezary Dudkiewicz, dr Jędrzej Garnek,
Zofia Gołaska, Adam Nawrocki,
Klaudia Piwowarczyk, Adrianna Smolińska,
dr Marek Szczepaniak, Anna Szymczyk,
Aurelia Tycka–Witek

Archiwum Państwowe w Poznaniu
Poznań 2024

Wydanie I
Poznań 2024

Autorzy:
Cezary Dudkiewicz, Zofia Gołaska, dr Jędrzej Garnek
Adam Nawrocki, Klaudia Piwowarczyk, Adrianna Smolińska,
dr Marek Szczepaniak, Anna Szymczyk, Aurelia Tycka–Witek

Redakcja, skład tekstu i korekta:
dr Jędrzej Garnek, Adrianna Smolińska

Projekt okładki: Adrianna Smolińska, Renata Ostapiuk

Druk: Drukarnia Axlo sp. z o.o., Poznań

ISBN: 978-83-963138-8-1

Wydawca: Archiwum Państwowe w Poznaniu

Projekt wydawniczy finansowany ze środków
Archiwum Państwowego w Poznaniu

ARCHIWA PAŃSTWOWE
ARCHIWUM PAŃSTWOWE
W POZNANIU

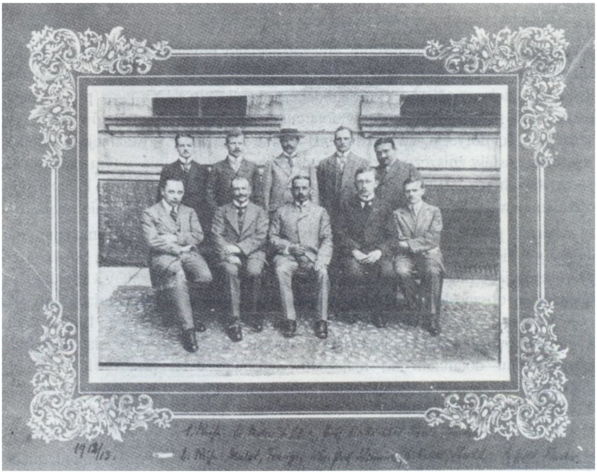
Spis treści

Wstęp

Dokumentacja przechowywana w archiwach państwowych spostrzegana jest w powszechnym odbiorze jako źródło informacji o przeszłości interesujące historyków i przedstawicieli nauk pomocniczych historii. Same archiwa jawią się w tym schemacie jako miejsce pracy uczonych reprezentujących przede wszystkim te gałęzie wiedzy. Tymczasem, dokumentacja znajdująca się we wspomnianych instytucjach jest tak bogata i różnorodna, że przedstawiciele bardzo wielu dyscyplin mogą znaleźć w niej interesujące informacje z zakresu swojej specjalności. W 2023 roku dr Marek Szczepaniak z gnieźnieńskiego Oddziału Archiwum Państwowego w Poznaniu wyszedł z pomysłem zwrócenia uwagi na wartość dokumentacji archiwalnej także dla matematyków. Postanowił on zaprezentować znajdujące się w zgromadzonych tam aktach, maturalne zadanie matematyczne, z którymi zmagali się absolwenci gimnazjów w drugiej połowie XIX i na początku XX wieku.

Początkowo dr Szczepaniak zwrócił się do nauczycieli matematyki z wielkopolskich szkół – **Agaty Ignaczak, Kamilli Stachowiak, Karoliny Tomczak, Kamila Kuźnika, Kamilli Sadowskiej oraz Aurelii Tyckiej–Witek**. Podjęli się oni zredagowania oryginalnych prac uczniów i ich rozwiązań. Następnie dr Szczepaniak zwrócił się do studentów zrzeszonych w Kole Naukowym Matematyków Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Studenci postanowili samodzielnie opracować zadania i ich rozwiązania we współczesnym języku matematycznym. Czasem sprowadzało się to do zreferowania rozwiązania maturzysty sprzed wieku, jednak w wielu przypadkach jego rozumowanie trzeba było poprawić lub też uwspółcześnić. Opieki merytorycznej podjęli się pracownicy Wydziału Matematyki i Informatyki UAM oraz Uniwersytetu WSB Merito w Poznaniu: **prof. UAM dr hab. Małgorzata Bednarska–Bzdęga, prof. UAM dr hab. Wojciech Dybalski, dr Jędrzej Garnek, prof. UAM dr hab. Michał Jasiczak, dr Jolanta Marzec–Ballesteros, dr Piotr Mizerka, dr Paweł Płaczek, dr Adam Przestacki oraz dr Katarzyna Taczała**. Nadzór z ramienia pracowników prowadził dr Jędrzej Garnek, zaś z ramienia studentów – Adrianna Smolińska. W całym procesie pomagał dr Szczepaniak, który oprócz przeprowadzenia kwerendy, odczytał występujące w materiale źródłowym polecenia do zadań oraz komentarze uczniów i nauczycieli oceniających prace egzaminacyjne.

Uczestnicy projektu wybrali zadania spośród 82 znajdujących się na kartach 24 poszytów z zespołu archiwalnego Państwowego Gimnazjum i Liceum Bolesława Chrobrego w Gnieźnie. Poszyty te zawierały zestawy prac pisanych przez abiturientów w latach 1892 – 1914. Do zadań rozwiązywanych przez maturzystów gnieźnieńskich dołączono również prace uczniów szkoły w Trzemesznie. Tamtejsze gimnazjum zostało zlikwidowane przez władze pruskie w ramach represji za udział młodzieży w Powstaniu Styczniowym. Na jego miejsce utworzono gimnazjum w Gnieźnie. Po kilku latach szkoła trzemeszeńska uzyskała status progimnazjum, szkoły nieposiadającej najwyższej programowo klasy maturalnej. Wybrane trzemeszeńskie prace maturalne i prace pisane podczas egzaminu kończącego naukę w progimnazjum pochodzą z lat 1851 – 1895. W połączeniu z materiałem gnieźnieńskim pozwala to na prześledzenie ewolucji wymagań podczas egzaminu maturalnego w dłuższym okresie czasowym. Porównanie prac z egzaminu końcowego w trzemeszeńskim progimnazjum i maturalnych z gimnazjum w Gnieźnie pozwala także na zauważenie różnic programowych między ostatnią a przedostatnią klasą ówczesnej szkoły średniej.



Kadra nauczycielska Gimnazjum Królewskiego w Gnieźnie w roku szkolnym 1912/1913

Po roku pracy możemy oddać w Wasze ręce zbiór trzydziestu zadań z matur sprzed wieku. Liczymy, że publikacja zainteresuje nauczycieli matematyki, uczniów zainteresowanych Królową Nauk, a także wszystkie osoby, które zastanawiają się, czy zdałyby maturę z dawnych czasów. W naszym zbiorze znaleźć można zarówno zadania, które mogłyby pojawić się na maturze podstawowej (np. te dotyczące rachunków na procentach), jak i takie, które dotyczą współcześnie zapomnianych dziedzin matematyki, takich jak geometria sferyczna. W pierwszej części książki omawiamy tryb przeprowadzania ówczesnych matur oraz omawiamy przykładową maturę z 1908 r. Dalsze rozdziały zawierają zadania z różnych matur podzielone tematycznie na zadania z algebry, geometrii planarnej, stereometrii, geometrii sferycznej, a także zadania z kontekstem fizycznym. Siódmy rozdział książki poświęcony jest zadaniom z gimnazjum w Trzemesznie. Zadecydowaliśmy o oddzieleniu ich od reszty zadań, jako że są one prostsze od innych – były bowiem przeznaczone dla innego etapu edukacji. Książkę kończymy dodatkiem dotyczącym tablic logarytmicznych oraz suwaka logarytmicznego.

Matury sprzed wieku to z pewnością źródło wielu ciekawych historii, i nie wszystkie z nich udało nam się odkryć. Przeglądając rozwiązania, kilkakrotnie przeprowadziliśmy „dochodzenie” dotyczące abiturientów. Jak się okazuje, część z nich odegrała później znaczące role w historii naszego regionu. Ich dzieje przybliżamy w ramkach umieszczonych pod niektórymi zadaniami, wraz ze skanami niektórych ich rozwiązań. Biografie piszących matury przygotował dr Marek Szczepaniak. Aby ułatwić lekturę uczniom oraz osobom, którym brakuje podstaw matematycznych, przypomnieliśmy w ramkach niektóre z faktów oraz pojęć zastosowanych w rozwiązaniach. W kilku miejscach komentujemy również rozwiązanie ucznia i inne związane z zadaniem ciekawe fakty.

Jak wynika z powyższego tekstu, w przygotowanie niniejszej książki zaangażowanych było co najmniej kilkanaście osób. Serdecznie dziękujemy wszystkim za poświęcony czas i życzymy satysfakcji z uzyskanego efektu!

dr Marek Szczepaniak, dr Jędrzej Garnek

Część I

O maturze

Tryb przeprowadzania egzaminu maturalnego w gimnazjum pruskim na przełomie XIX i XX wieku.

Wprowadzenie. W dotychczasowych badaniach nad trybem przeprowadzania egzaminu maturalnego z matematyki w szkołach na ziemiach polskich zaboru pruskiego koncentrowano się przede wszystkim na okresie pierwszej połowy XIX w. Na szczególną uwagę zasługuje artykuł Stanisława Domaradzkiego i Karoliny Karpińskiej na temat egzaminów maturalnych z matematyki od XVIII do początku XX wieku.[6] Autorzy szczegółowo omawiają okoliczności wprowadzenia egzaminów maturalnych i ich ewolucję do lat 80. XIX w. Drugim wątkiem skupiającym ich uwagę jest porównanie matury pruskiej do matury polskiej w okresie II Rzeczypospolitej. Natomiast dość pobieżnie omówiono końcowe egzaminy z matematyki przeprowadzane na przełomie XIX i XX wieku, zwłaszcza po wprowadzeniu nowych zasad w 1883 r., o czym autorzy zaledwie wspomnieli. [6, str. 184]

Procedury egzaminacyjne. Procedura egzaminu maturalnego przeprowadzanego w gnieźnieńskim gimnazjum od lat osiemdziesiątych XIX w. do końca okresu pruskiego oparta była na regulaminie rozesłanym do szkół przez Królewskie Prowincjonalne Kolegium Szkolne w Poznaniu (dalej: KPKS) w styczniu 1882.[9] Wprowadzone wówczas zasady obowiązywać miały od egzaminów przeprowadzonych w terminie wielkanocnym 1883 r. Przesłany dokument regulował tryb przeprowadzania egzaminów w różnych typach szkół – gimnazjach, progimnazjach, gimnazjach realnych, progimnazjach realnych, wyższych szkołach miejskich. W części przeznaczonej dla gimnazjów, w pierwszym paragrafie, regulamin stwierdzał, że celem egzaminu końcowego jest stwierdzenie, czy uczeń osiągnął poziom wiedzy będący celem gimnazjum. [1] W dalszej części stwierdzano, że prawo przeprowadzenia egzaminu posiadają wszystkie szkoły, które zostały do tego upoważnione przez odpowiedniego ministra. Regulamin wymieniał zakres wiedzy z poszczególnych przedmiotów nauczania, który podlegał weryfikacji. Otrzymanie pozytywnych ocen ze wszystkich przedmiotów upoważniało absolwenta do uzyskania świadectwa dojrzałości. Z zakresu matematyki przystępujący do egzaminu zobowiązany był udowodnić, że opanował arytmetykę aż do rozwinięcia twierdzenia o dwumianie, algebrę aż do równań drugiego stopnia włącznie, posiada wiedzę z zakresu trygonometrii oraz, że nabył wystarczającą praktykę w stosowaniu nabytej wiedzy do rozwiązywania prostych zadań. Zakres wymaganej wiedzy z zakresu fizyki, jakiego wymagano od absolwenta gimnazjum, określony był dość ogólnikowo. Wykazać on się musiał znajomością zasad i praw równowagi i ruchu ciał, ciepła, magnetyzmu i elektryczności, dźwięku i światła. Wymieniony zakres wymagań z zakresu przedmiotów ścisłych dotyczył uczniów gimnazjów klasycznych.

Egzamin maturalny przeprowadzany był przez Komisję Egzaminacyjną. Na jej czele stał Komisarz Królewski powoływany przez KPKS spośród własnych członków i zajmujący się w ciągu roku sprawami danej szkoły. Oprócz niego w skład Komisji wchodzili dyrektor gimnazjum oraz nauczyciele uczący w najwyższej programowo klasie. Do roku szkolnego 1904/1905 najwyższą programowo klasą były Prima (klasa pierwsza), a w kolejnych latach Ober Prima (klasa pierwsza wyższa). Niższe klasy kolejno stanowiły: Unter Prima (klasa pierwsza niższa), Ober Secunda (klasa druga wyższa), Unter Secunda (klasa druga niższa),

[1] W dokumencie na określenie końcowego egzaminu używano wyrażenia „Entlassungsprüfung"

Ober Tertia (klasa trzecia wyższa), Unter Tertia (klasa trzecia niższa), Quarta (klasa czwarta), Quinta (klasa piąta) i najniższa programowo Sexta (klasa szósta). Jeszcze przed wprowadzeniem podziału na Primę Wyższą i Primę Niższą, nauczanie w klasie pierwszej trwało dwa lata. Paragraf 5 regulaminu postanawiał, że uczeń przystąpić może do egzaminu końcowego nie wcześniej niż w czwartym okresie dwuletniego okresu nauczania. Podanie o dopuszczenie do egzaminu składano pisemnie na ręce dyrektora szkoły na trzy miesiące przed egzaminem. Przyjęcie do grupy osób dopuszczonych do egzaminu następowało na podstawie decyzji KPKS podjętej na jednomyślny wniosek nauczycieli należących do komisji egzaminacyjnej. Jeśli zgodnie z jednomyślną decyzją nauczycieli uczeń nie osiągnął jeszcze wymaganego poziomu wiedzy i dojrzałości, dyrektor miał obowiązek odradzić mu przystąpienie do egzaminu i złożyć odpowiednie oświadczenie rodzicom lub ich przedstawicielom.

Terminy. Rok szkolny w gimnazjum rozpoczynał się dwutygodniowymi feriami wielkanocnymi które miały miejsce na przełomie marca i kwietnia, w zależności od daty Wielkanocy. Zajęcia, które wznawiano na ogół tydzień po świętach, trwały do tygodniowych ferii w dni przypadające blisko święta Zesłania Ducha Świętego (Zielone Świątki). Święto przypada zawsze 49 dni (7 tygodni) po niedzieli wielkanocnej. Nauka, która rozpoczynała się po Zielonych Świątkach trwała do początku lipca, kiedy to rozpoczynały się miesięczne wakacje letnie (tzw. „żniwne"). Przez większości sierpnia i września ponownie trwały zajęcia szkolne. Na przełomie września i października rozpoczynała się dwutygodniowa przerwa tzw. „świętomichalska". Lekcje wznawiano w połowie października. Kończyły się one kilka dni przed Bożym Narodzeniem. Przerwa w nauce trwała do 6 stycznia włącznie, czyli do święta Trzech Króli. Zajęcia rozpoczęte na początku stycznia kończyły się około dwa tygodnie przed Wielkanocą, kiedy to następowały kolejne ferie.

Egzamin końcowy organizowano w ciągu roku szkolnego dwukrotnie. Egzaminy w tzw. terminie „świętomichalskim" na początku września, tj. na koniec pierwszego semestru tzw. letniego i w terminie „wielkanocnym", który najczęściej miał miejsce na przełomie stycznia i lutego – pod koniec semestru zimowego. Wszystkie daty roku szkolnego zależały w dużej mierze od daty Wielkanocy.

Egzamin maturalny składał się z dwóch części – pisemnej i ustnej. Część lingwistyczną egzaminu pisemnego stanowiły wypracowanie w języku niemieckim i łacińskim, tłumaczenie z języka niemieckiego na język łaciński, tłumaczenie z języka greckiego na niemiecki. W części matematycznej uczeń miał do wyboru jeden z trzech zestawów zadań, z których każdy zawierał cztery zadania, po jednym z planimetrii, stereometrii, trygonometrii i algebry. Zalecano jednocześnie, by jedno z zadań matematycznych było tak skonstruowane, by dawało uczniowi możliwość wykazania się znajomością praw fizycznych. [10, § 6 pkt 2]

Uczniowie przystępujący do egzaminu w tym samym terminie otrzymywali te same zadania. Regulamin zalecał, by ich rodzaj i stopień trudności w niczym nie przekraczał poziomu materiału realizowanego w czasie zajęć Primy. Z drugiej strony powinny one być tak sformułowane by nie były zbyt podobne do przerobionych na lekcjach. Praca ucznia podczas egzaminu nie powinna ograniczać się do odtworzenia prac wykonanych w czasie zajęć, lecz być możliwie samodzielną. Nauczyciel uczący w najwyższej programowo klasie danego przedmiotu, przedstawiał dyrektorowi szkoły pytania egzaminacyjne z tego zakresu do zatwierdzenia. Z matematyki, nauczyciel przygotowywał trzy zestawy po 4 zadania w każdym zestawie.[10, §7 pkt 5. Por. §6] Propozycje zadań przesyłane były do Komisarza Królewskiego. Ten po dokonaniu wyboru, zwracał je opieczętowane. Komisarz mógł wybrać inne, niż przekazane mu propozycje zadań. Jeżeli pojawiły się jakiekolwiek wątpliwości co do proponowanych zadań, Komisarz miał prawo wyznaczyć inne zadania ze wszystkich, lub tylko z poszczególnych przedmiotów. Do szczególnych obowiązków Komisji Egzaminacyjnej, a w szczególności do dyrektora szkoły i nauczycieli układających pytania, należało zachowanie ich treści w tajemnicy, aż do momentu rozpoczęcia egzaminu. Regulamin podkreślał dodatkowo, że należy też unikać wszelkich sugestii na temat treści zadań. [10, §7 pkt 8]

Przebieg egzaminu. Przebieg egzaminu końcowego regulował §8 regulaminu. Zgodnie z nim, egzamin pisemny odbywał się w odpowiedniej sali gimnazjum pod stałym nadzorem nauczycieli, członków Komisji Egzaminacyjnej wyznaczonych przez dyrektora. Na każde z dwóch wypracowań (z języków niemieckiego i łacińskiego) oraz na pracę z matematyki należało przeznaczyć pięć godzin porannych. W przypadku wypracowań językowych, można było w razie potrzeby, przekroczyć termin o pół godziny. Egzamin nie mógł być przerywany. Egzamin matematyczny mógł być podzielony na dwie części, przy czym wyznaczano zadania, który powinny być rozwiązane w każdej z części. Obydwa etapy egzaminu rozdzielone były przerwą na wypoczynek. Oprócz słowników łacińskiego, greckiego i hebrajskiego oraz tablic logarytmicznych z matematyki, niedopuszczalne było wnoszenie do sali egzaminacyjnej innych pomocy. Każdy z egzaminowanych, który ukończył swoją pracę miał obowiązek oddać ją nauczycielowi prowadzącemu i opuścić salę. Kto nie ukończył swojej pracy po upływie wyznaczonego czasu powinien oddać ją w stanie nieukończonym. W każdym przypadku należało także zwrócić notatki sporządzone w trakcie egzaminu, niezależnie od tego czy zostały wykorzystane podczas pracy, czy nie. Każdy uczeń, który podczas egzaminu korzystał z niedozwolonych pomocy albo dopuścił się próby oszustwa, jak również każdy, kto mu w tym pomagał, zostawał wykluczony z dalszej części egzaminu. Jeśli wykroczenie to zostałoby wykryte dopiero po ukończeniu egzaminu, jego świadectwo końcowe podlegało zatrzymaniu. Osoby ukarane w ten sposób należało w trakcie powtarzania egzaminu traktować jak abiturientów, którzy egzaminu nie zdali. Kto dopuścił się wykroczenia podczas powtarzania egzaminu mógł być wykluczony ze zdawania matury. Sprawa nie należała jednak do prostych lub często stosowanych, bowiem decyzję taką mógł wydać jedynie właściwy minister. Wszelkie działania związane z podjętą przez ucznia próbą oszustwa, dyrektor i nauczyciele – członkowie Komisji Egzaminacyjnej, podejmowali przed przystąpieniem do egzaminów ustnych. Dyrektor szkoły miał wyraźnie wskazany obowiązek zwrócić uwagę wszystkim przystępującym do egzaminu na punkty regulaminu dotyczące wspomnianych wykroczeń. Powinien to zrobić przed rozpoczęciem pierwszego egzaminu pisemnego.

Ocena prac. Każdą pracę w pierwszej kolejności sprawdzał nauczyciel przedmiotu. Stwierdzone błędy zaznaczał wskazując ich rodzaj i znaczenie. Następnie oceniana była wartość pracy w zestawieniu z wymaganiami egzaminacyjnymi. Prace oceniano według czterech stopni:

- sehr gut (bardzo dobry),
- gut (dobry),
- genügend (wystarczający),
- ungenügend/nichtgenügend (niewystarczający).

Do pisemnego podsumowania pracy należało dodać informacje o osiągnięciach ucznia w czasie zajęć klasowych. Jednakże nie mogły one mieć wpływu na ocenę pracy egzaminacyjnej. W dalszej kolejności prace przekazywane były członkom Komisji Egzaminacyjnej. Podczas zwołanej przez dyrektora narady zestawiano oceny poszczególnych prac oraz podejmowano decyzję, którzy ze zdających zostaną wykluczeni z egzaminu ustnego i którym przyznane zostanie zwolnienie z niego. Królewski Komisarz posiadał upoważnienie do zmiany ocen prac egzaminacyjnych. Zmiany przez niego wprowadzone winny być uwzględnione w protokole. [10, §9]

Egzaminy ustne. Egzamin ustny powinien być przeprowadzony w ciągu ostatnich sześciu tygodni danego semestru szkolnego. Wyznaczenie dnia egzaminu i przewodniczenie w czasie jego przebiegu, należało do kompetencji Królewskiego Komisarza. W dzień egzaminu dyrektor posiadał w sali egzaminacyjnej prace pisemne zdających z Primy oraz oceny jakie uzyskali w tej klasie

– również w przypadku, jeśli część kursu Primy odbyli w innej szkole. Na egzaminie ustnym, oprócz nauczycieli wchodzących w skład Komisji Egzaminacyjnej, musieli być obecni wszyscy nauczyciele szkoły. Jeśli egzamin trwał kilka dni, obowiązek ten dotyczył tylko pierwszego dnia egzaminów. Uczeń, którego pisemne prace egzaminacyjne, wszystkie lub w większości, uzyskały ocenę „niewystarczającą” i w protokole egzaminacyjnym wyrażono wątpliwość co do ich dojrzałości, zostawał wykluczony z egzaminu ustnego. Jeśli taka wątpliwość nie została wyrażona, Komisja Egzaminacyjna podejmowała decyzję czy przed egzaminem ustnym należy wydać uczniowi zalecenie wycofania się z niego. Jeśli w opinii nauczycieli wyniki ucznia w czasie nauki w Primie były zadowalające, a prace pisemne na egzaminie absolutoryjnym były wystarczające, a niektóre z nich lepsze, wówczas uczeń mógł być zwolniony z egzaminu ustnego. Decyzja w tej sprawie musiała być podjęta przez nauczycieli jednomyślnie. Przy zastosowaniu tego przywileju należało wziąć pod uwagę zachowanie się ucznia podczas nauki w szkole. [10, §10]

Obowiązywała zasada, że w jednym dniu egzaminu nie może go zdawać więcej niż dziesięciu uczniów. Jeżeli kandydatów do egzaminu było więcej, należało ich podzielić na kilka grup w zależności od ich liczby. Każda z grup zdawała egzamin oddzielnie. Kolejność zdawanych przedmiotów i czas poświęcony na każdy z nich ustalał Komisarz Królewski. Egzaminowani nie mieli prawa wnosić na egzamin książek. W razie próby naruszenia tego przepisu, stosowano kary, jak przy egzaminie pisemnym (§ 6). Każdy przedmiot zdawany był przed nauczycielem, który wykładał go w najwyższej klasie. Komisarz Królewski miał jednak prawo do zadawania dodatkowych pytań zdającym, a w indywidualnych przypadkach do samodzielnego przeprowadzenia egzaminu. Zakres pytań z matematyki nie miał ograniczać się tylko do programu Primy. Podobnie, jak w części pisemnej, fizyka nie stanowiła specjalnego przedmiotu egzaminacyjnego. Zalecano jednak łączenie zagadnień fizycznych z matematycznymi. [10, §11]

Po zakończeniu części ustnej egzaminu, Komisja Egzaminacyjna podejmowała decyzję o wynikach całego egzaminu. O kolejności rozpatrywania i podejmowania decyzji w poszczególnych kwestiach decydował Komisarz Królewski. Przy ustalaniu oceny końcowej uwzględniano wyniki części pisemnej i ustnej z egzaminu oraz ocenę uzyskaną na zajęciach z przedmiotu przed rozpoczęciem egzaminu. Egzamin uważany był za zaliczony, jeśli żadna z ocen z egzaminu i z zajęć klasowych, z żadnego przedmiotu obowiązkowego nie będzie oceną „niewystarczającą”. Niedopuszczalne były jakiekolwiek odstępstwa od tej zasady – ani ze względu na przyszły zawód wybierany przez egzaminowanego, ani w przypadku gdy oceny „niewystarczające” były równoważone co najmniej „dobrymi” ocenami z innych przedmiotów obowiązkowych. Przy ustalaniu oceny końcowej, nauczyciele religii mieli obowiązek wstrzymać się od głosu, jeśli dyskusja dotyczyła ucznia, który nie uczestniczył w ich zajęciach. W przypadku równiej liczby głosów podczas wszystkich głosowań Komisji Egzaminacyjnej, głos rozstrzygający miał Komisarz Królewski. Miał on również prawo sprzeciwu wobec decyzji Komisji Egzaminacyjnej o przyznaniu, lub odmowie przyznania świadectwa dojrzałości. W takim przypadku dokumentację postępowania egzaminacyjnego przedkładano KPKS, które podejmowało ostateczną decyzję. Po zakończeniu obrad Komisji Egzaminacyjnej i podpisaniu protokołu przez wszystkich członków Komisji, Królewski Komisarz ogłaszał zdającym ogólny wynik egzaminu.[10, §12]

Koszty egzaminu końcowego w gimnazjum (egzaminu maturalnego) wynosiły 30 marek, zaś egzaminu końcowego w progimnazjum 20 marek. Ich wysokość zbliżona była do opłat wpisowego wnoszonego w tym czasie przez nowych członków przystępujących do gnieźnieńskich cechów rzemieślniczych. W zależności od cechu wahały się one od 15 do 30 marek.

Świadectwa. Każdy, kto zdał egzamin maturalny otrzymywał świadectwo dojrzałości. Na początku dokumentu wymieniano dane osobowe jego właściciela: nazwisko i imię, datę i miejsce urodzenia, stanowisko i imię ojca, miejsce zamieszkania ojca (w razie potrzeby razem z powiatem), ilość lat uczęszczania przez ucznia do gimnazjum, w tym ile lat uczył się w Primie.

W części pierwszej świadectwa umieszczano informacje na temat zachowania się i pilności absolwenta. W tej części odnotowywano również ewentualną dyspensę od egzaminu ustnego. W części drugiej, wpisywano oceny z poszczególnych przedmiotów: religii, języka niemieckiego, języka łacińskiego, języka greckiego, języka francuskiego, języka hebrajskiego, języka polskiego (ewentualnie języka angielskiego), historii i geografii (jako jeden przedmiot), matematyki, fizyki, gimnastyki, rysunku i śpiewu. Oceny z poszczególnych przedmiotów nauczania miały wskazywać ogólny poziom wiedzy zdającego w odniesieniu do zakładanych celów nauczania. W przypadku, gdy wyniki egzaminu pisemnego i ustnego odbiegały od wyników zajęć, różnica ta musiała być na świadectwie wyraźnie wyrażona. Oceny każdego przedmiotu nauczania należało podać według skali przejętej w §9 pkt 1 regulaminu.

Poniżej ocen widniała na świadectwie formuła: „Ponieważ obecnie kończy szkołę średnią, podpisana niżej Komisja Egzaminacyjna wydała mu świadectwo, by mógł zostać...” – i wpisywano nazwę zawodu wybranego przez właściciela dokumentu. W dalszej części świadectwa widniała formuła o zwolnieniu absolwenta z obowiązków, miejscowość wystawienia i datę, przy czym wpisywano dzień egzaminu ustnego. Na końcu następowały podpisy członków Komisji Egzaminacyjnej: Królewskiego Komisarza, przedstawiciela Magistratu, dyrektora szkoły i nauczycieli.

Progimnazja. Progimnazja była niepełnymi gimnazjami – bez klas Ober Primy i Unter Primy. Ich ukończenie nie dawało prawa studiowania na wyższych uczelniach. Tryb przeprowadzania egzaminu końcowego w progimnazjach był bardzo podobny, jak w pełnych gimnazjach. Do egzaminu przystępowali uczniowie nie wcześniej, niż w czwartym semestrze dwuletniej Secundy. Na pisemnym egzaminie końcowym z zakresu matematyki abiturient zobowiązany był do wyliczenia czterech zadań z matematyki, w tym dwóch algebraicznych, jednego z zakresu planimetrii i jednego z trygonometrii. Abiturienci nie zdawali z matematyki egzaminu ustnego. Koszt egzaminu końcowego w progimnazjum wynosił 20 marek.

W następnych latach pruskie władze szkolne wprowadzały drobne zmiany dotyczące przebiegu końcowych egzaminów w różnych typach szkół. Znaczna ich część dotyczyła szkół realnych. W gimnazjach klasycznych radykalnych zmian nie było.

Autor tekstu: dr Marek Szczepaniak

Treści nauczania

Treści nauczania z każdego przedmiotu we wszystkich klasach, podawano w drukowanym przez szkołę na koniec roku szkolnego Sprawozdaniu rocznym, rozsyłanym do szkół przez Królewskie Prowincjonalne Kolegium Szkolne. W części dotyczącej klasy maturalnej podawano treść zadań składanych podczas ostatniego egzaminu maturalnego. Przy klasach niższych wymieniano bloki zagadnień przerabiane z uczniami podczas minionego okresu nauki. Poniżej pokazujemy skan fragmentów tej broszury z 1901 roku wraz z tłumaczeniem. Po wyjaśnienia dotyczące nazw klas kierujemy do poprzedniego rozdziału.

Mathematik. Der Koordinatenbegriff und einige Grundlehren von den Kegelschnitten. Aufgaben aus allen Gebieten der Geometrie und Stereometrie. Vervollständigung der Trigonometrie. Zinseszins- und Rentenrechnung. 4 Stdn. Schnee.

Aufgaben für die schriftliche Reifeprüfung vor Ostern 1901:

1) In einem Walde, der 10000 Kubikmeter Holz enthält und dessen Zuwachs jährlich 5% beträgt, werden zu Ende eines jeden Jahres 800 Kubikmeter Holz geschlagen. Wie viel Kubikmeter wird der Wald nach 10 Jahren noch enthalten?
2) Eine gegebene Sehne a eines gegebenen Kreises soll so verlängert werden, dass die von ihrem Endpunkte an den Kreis konstruierte Tangente gleich der Summe aus der halben Verlängerung der Sehne und einer gegebenen Strecke b ist.
3) F=84; r=8,125; a=13. Die übrigen Stücke des Dreiecks zu berechnen.
4) Eine Kugel von dem Radius R sei in der Entfernung des halben Radius vom Mittelpunkte durch eine Ebene durchschnitten. In dem Schnittkreise sei ein Quadrat einbeschrieben und über diesem in dem grösseren Kugelabschnitte eine gerade Pyramide konstruiert, deren Spitze in der Kugelfläche liegt Wie gross ist der Inhalt und die Oberfläche dieser Pyramide und wie gross ist der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche? ev. freiwillig — der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander?

Prima: Pojęcie współrzędnych oraz niektóre podstawy teorii krzywych stożkowych. Zadania ze wszystkich dziedzin geometrii płaskiej i przestrzennej. Uzupełnienie trygonometrii. Obliczenia procentu składanego i rent. 4 godziny tygodniowo. Zadania z pisemnego egzaminu maturalnego przed Wielkanocą 1901 r.:

1. W lesie, który zawiera 10 000 metrów sześciennych drewna, a jego roczny przyrost wynosi 50, pod koniec każdego roku ścinane jest 800 metrów sześciennych drewna. Ile metrów sześciennych drewna pozostanie w lesie po 10 latach?
2. Dany jest cięciwa a w danym okręgu, którą należy wydłużyć tak, aby styczna skonstruowana z jej końca do okręgu była równa sumie połowy wydłużenia cięciwy oraz danej odcinka b.
3. $F = 84$, $r = 8{,}125$, $a = 13$. Oblicz pozostałe elementy trójkąta.
4. Kula o promieniu R jest przecięta płaszczyzną w odległości połowy promienia od środka. W powstałym okręgu przecięcia wpisano kwadrat, nad którym w większej części kuli skonstruowano prostą ostrosłup, którego wierzchołek znajduje się na powierzchni kuli. Jakie są objętość i powierzchnia tego ostrosłupa oraz jaki jest kąt nachylenia jego ścian bocznych względem podstawy? Opcjonalnie: jaki jest kąt nachylenia ścian bocznych względem siebie nawzajem?

Mathematik. Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Gleichungen einschliesslich der quadratischen mit mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Reihen erster Ordnung. Abschluss der Ähnlichkeitslehre und geometrische Konstruktionsaufgaben. Ebene Trigonometrie nebst Übungen im Berechnen von Dreiecken und Vierecken. 4 Stdn. Schnee.

Ober-Secunda: Nauka o potęgach, pierwiastkach i logarytmach. Równania, w tym kwadratowe z kilkoma niewiadomymi. Ciągi arytmetyczne i geometryczne pierwszego rzędu. Uzupełnienie teorii podobieństwa oraz zadania z konstrukcji geometrycznych. Obliczenia dotyczące trójkątów i czworokątów. Trygonometria płaska wraz z ćwiczeniami w obliczaniu trójkątów i czworokątów.

Mathematik. 4 Stdn. wöchentlich. Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten besonders quadratische Gleichungen und in Worte gekleidete Aufgaben. Definition des Logarithmus und die wichtigsten Sätze über Logarithmen. Übungen im Rechnen mit Logarithmen. Wiederholung der Potenz- und Wurzellehre. Berechnung des Kreises, des Sektors und des Kreissegmentes. Definition der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck. Trigonometrische Berechnung von Dreiecken, wobei besonders Aufgaben aus dem praktischen Leben berücksichtigt wurden. Berechnung des Volumens und der Oberfläche von Prismen, Pyramiden, Cylindern, Kegeln und Kugeln. Sturtzel.

Unter-Secunda: 4 godziny tygodniowo. Równania z jedną i wieloma niewiadomymi, ze szczególnym uwzględnieniem równań kwadratowych oraz zadań tekstowych. Definicja logarytmu i najważniejsze twierdzenia dotyczące logarytmów. Obliczenia z wykorzystaniem logarytmów. Powtórzenie nauki o potęgach i pierwiastkach. Obliczenia dotyczące koła, wycinka kołowego i odcinka kołowego. Definicja funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. Trygonometryczne obliczenia trójkątów, z uwzględnieniem zadań praktycznych z życia codziennego. Obliczenia objętości i powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walców, stożków i kul.

Mathematik. a) Arithmetik: Lehre von den Proportionen, Potenzen und Wurzeln. Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Planimetrie: Vergleichung des Flächeninhalts geradliniger Figuren. Lehre von der Proportionalität und Ähnlichkeit der Figuren 3 Stdn. wöchentlieh. Sturtzel.

Ober-Tertia: Arytmetyka: Nauka o proporcjach, potęgach i pierwiastkach. Równania pierwszego stopnia z jedną i wieloma niewiadomymi. Planimetria: Porównywanie pól powierzchni figur prostoliniowych. Nauka o proporcjonalności i podobieństwie figur. 3 godziny tygodniowo.

Mathematik. Arithmetik: Im Sommer 2 Stunden, im Winter 1 Stunde wöchentlich. Die Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Zerlegen von Summen und Differenzen in Faktoren. Das Heben der Brüche. Gleichungen mit einer Unbekannten. Geometrie: Im Sommer 1 Stde., im Winter 2 Stdn. wöchentlich. Lehre vom Parallelogramm, Trapez und Kreise. Lösung leichterer Konstruktionsaufgaben. 3 Stdn. Schnee. Bis 21. November in A Sturtzel.

Unter-Tertia: Arytmetyka: Latem 2 godziny tygodniowo, zimą 1 godzina tygodniowo. Podstawowe działania na liczbach ogólnych. Rozkładanie sum i różnic na czynniki. Operacje na ułamkach. Równania z jedną niewiadomą. Geometria: Latem 1 godzina tygodniowo, zimą 2 godziny tygodniowo. Nauka o równoległobokach, trapezach i okręgach. Rozwiązywanie prostszych zadań konstrukcyjnych. 3 godziny tygodniowo.

Mathematik. Planimetrie: Die Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken. Einfache Konstruktionsaufgaben. 2 Stunden, in A und B Wittrien.

Quarta: Planimetria – Nauka o prostych, kątach i trójkątach. Proste zadania konstrukcyjne. 2 godziny tygodniowo.

Rechnen. Bruchrechnung. Einfache Regeldetri und Zinsaufgaben. Einführung in die Rechnung mit Decimalbrüchen. 4 Stdn. in A und B Wittrien.

Quinta: Działania na ułamkach zwykłych. Proste zadania z reguły trzech i obliczania odsetek. Wprowadzenie do rachunków z ułamkami dziesiętnymi.

Rechnen. Wiederholung der Grundrechnungsarten mit benannten und unbenannten ganzen Zahlen. Resolvieren, Reduzieren, Zeitrechnung. Die deutschen Münzen, Masse und Gewichte. Übungen in der dezimalen Schreibweise und den einfachsten Dezimalrechnungen. 4 Stdn wöchentlich. In A Schnee, in B Sturtzel.

Sexta: Liczby całkowite. Powtórzenie podstawowych działań na liczbach nazwanych i nienazwanych, rozwiązywanie równań, redukcja, obliczanie czasu. Niemieckie monety, miary i wagi. Ćwiczenia w zapisie dziesiętnym oraz w najprostszych obliczeniach dziesiętnych. 4 godziny tygodniowo.

Rechnen. Kopfrechnen im Zahlenkreise von 1—1000. Münzen, Masse und Gewichte. Einmaleins mit Währungszahlen und Vielfachen von 10. Schriftliches Rechnen nach dem Rechenheft von Blümel Teil II und III. 5 Stdn. Weise.

Vorschulklasse: Obliczenia pamięciowe w zakresie liczb od 1 do 1000. Monety, tabliczka mnożenia z liczbami walutowymi i wielokrotnościami 10. Zgodnie z zeszytem ćwiczeń Blümela, część II i III. 5 godzin tygodniowo. Miary i wagi, obliczenia pisemne.

Autor tekstu: dr Jędrzej Garnek

Analiza matury z 1908 roku

Niniejszy rozdział skupiać się będzie na analizie matury z 1908r. Każdy z abiturientów miał do wyboru jeden z trzech zestawów zadań. Omówimy zestaw I, ten wybrany przez Paula Wegnera, którego praca posłużyła nam za źródło treści poleceń. Zanim jednak przejdziemy do rozwiązań, przedstawimy zawartość dwóch pozostałych zestawów.

Zestaw II

Zadanie 1
Obserwatorium astronomiczne w Paryżu leży na $48°50'13''$ szerokości geograficznej północnej oraz $2°20'15''$ długości geograficznej wschodniej, a obserwatorium w Moskwie na $55°45'20''$ szerokości geograficznej północnej oraz $37°34'6''$ długości geograficznej wschodniej. Jaka odległość w milach geograficznych, mierzona po powierzchni Ziemi, dzieli oba te miejsca?

Zadanie 2
Skonstruuj trójkąt, mając dane: $s - c = 2\,\text{cm}$, $\rho = 1\,\text{cm}$, $\rho_c = 2,5\,\text{cm}$.

Zadanie 3
Korkowy walec o promieniu podstawy r ma zostać na długości przecięty otworem w środku w taki sposób, aby wsunię-

ty w ten otwór ołowiany walec dokładnie pasował. Całość, po położeniu na wodzie, ma zanurzać się do połowy. Jaki promień powinien mieć walec z ołowiu, jeśli gęstość korka wynosi s_k, a ołowiu s_o?

Zadanie 4
Jakie są długości stycznych poprowadzonych z punktu $P(2,4)$ do punktów styczności hiperboli o półosi wielkiej $a = 4$ i półosi małej $b = 2$?

Zestaw III

Zadanie 1
Rozwiąż równanie

$$x^5 - 11x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 11x - 1 = 0.$$

Zadanie 2
Z punktu P wycelowano w punkty A, B i C, znajdujące się wraz z punktem P w jednej płaszczyźnie. Odległości między punktami wynoszą: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Punkty B i C widziane z P leżą na jednej prostej, przy czym B jest między P a C. Punkt A widziany z P znajduje się pod kątem α względem B. Jak daleko znajduje się P od B?

Zadanie 3
Korzystając ze wzoru Herona oblicz pole trójkąta danego wierzchołkami $A(3,2)$, $B(6,3)$, $C(5,8)$.

Zadanie 4
Osoba posiadająca kapitał a marek, pożyczony przy rocznej stopie procentowej $p\%$, wypłaca z niego na koniec każdego roku r marek na swoje potrzeby. Po ilu latach kapitał zostanie całkowicie wyczerpany? ($a = 20000$, $r = 2000$, $p = 4$)

Zestaw I

Zadanie 1
Ile należy dodać na koniec każdego roku do kapitału 3000 marek, aby w ciągu ośmiu lat podwoił się on poprzez odsetki składane przy stopie $4\frac{1}{2}\%$?
Źródło: [1, sygn. 235, str. 59–60, 65.], matura z 5.02.1908 r.

Rozwiązanie:
Aby rozwiązać problem, niezbędna jest znajomość wzorów na sumę n pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego oraz na procent składany.

Ciąg geometryczny:

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **geometrycznym**, jeżeli iloraz każdych dwóch kolejnych wyrazów jest stały i niezerowy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Ciąg taki jest zadany wzorem:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}.$$

Wzór na **sumę** n pierwszych wyrazów tego ciągu:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ a_1 n, & q = 1. \end{cases}$$

Procent składany:

Procent składany jest sposobem oprocentowania pieniężnego wkładu, w którym odsetki za dany okres doliczane są do wkładu.

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100k}\right)^{nk},$$

gdzie K jest kapitałem początkowym, n latami oszczędzania, p oprocentowaniem (w skali roku), k liczbą kapitalizacji w ciągu roku, natomiast K_n zgromadzonym kapitałem.

Procent składany (z uwzględnieniem dodawanej kwoty):

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100k}\right)^{nk} + S_n,$$

gdzie $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ jest sumą kwoty a_1 dodawanej przez n lat wraz z działającym oprocentowaniem, przy czym $q = \left(1 + \frac{p}{100k}\right)$ dla powyższych oznaczeń.

Zauważmy, że z polecenia odczytamy następujące dane: $K = 3000$ marek, $n = 8$ lat, $k = 1$, $p = 4,5\%$ oraz $K_8 = 2 \cdot K = 6000$ marek. Otrzymujemy więc równanie:

$$6000 = 3000\,(1 + 0,045)^8 + a_1 \cdot \frac{1 - (1 + 0,045)^8}{1 - (1 + 0,045)}.$$

Stąd wyliczamy szukane $a_1 \approx 184,83$ marek. Tę kwotę należy dodać do kapitału, aby po ośmiu latach zwiększył się dwukrotnie.

Komentarz do zadania:

Zwróćmy uwagę na fakt, że powyższy typ zadania nadal pojawia się w pewnej formie we współczesnych arkuszach maturalnych. Jednakże obecnie, z reguły, rozdziela się zagadnienia dotyczące ciągu geometrycznego, np.

> *Trzywyrazowy ciąg* $(27, 9, a-1)$ *jest geometryczny. Liczba* a *jest równa...*
> (zadanie zamknięte jednokrotnego wyboru, matura podstawowa z matematyki 2023r.)

od tych związanych z procentem składanym, np.

> *Kwotę 1000 zł ulokowano w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości* 4% *w stosunku rocznym. Po zakończeniu lokaty od naliczonych odsetek odprowadzany jest podatek w wysokości* 19%. *Maksymalna kwota, jaką po upływie roku będzie można wypłacić z banku, jest równa...*
> (zadanie zamknięte jednokrotnego wyboru, matura podstawowa z matematyki 2015r.)

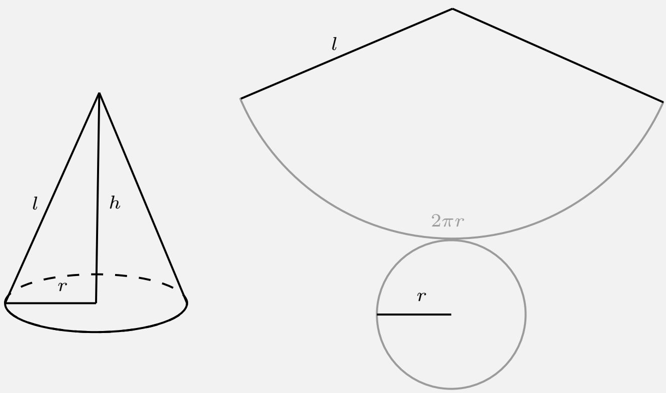
Ówcześnie wskazany rodzaj zadania istniał raczej jako zestawienie obu tematów, co można zobaczyć na przykładach Dług (Rozdział 2) oraz Mieszkańcy Jarocina (Rozdział 3).

Zadanie 2
Kulę o promieniu r należy przekształcić w stożek prosty tak, aby jego powierzchnia boczna była m razy większa od podstawy. Jaki jest promień podstawy i wysokość stożka?
Źródło: [1, sygn. 235, str. 59, 61–62.], matura z 5.02.1908 r.

Rozwiązanie:

Stożek:

Stożek jest bryłą powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z jego przyprostokątnych. Prostą nazywamy osią stożka, a zawarta w niej przyprostokątna staje się wysokością h stożka. Przeciwprostokątną trójkąta (oraz dowolny odcinek łączący wierzchołek stożka z brzegiem podstawy) nazywamy tworzącą stożka l. Bryła ma w podstawie koło o promieniu r.



Na pole powierzchni całkowitej stożka składa się pole podstawy, czyli pole koła $P_p = \pi r^2$ i pole powierzchni bocznej $P_b = \pi r l$:
$$P = \pi r \left(r + l \right).$$

Objętość stożka można obliczyć ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3} P_p h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Chcemy otrzymać stożek o szczególnej własności. Jego powierzchnia boczna ma być m razy większa od podstawy. Zatem zachodzić powinno:

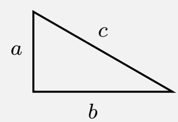
$$P_b = m P_p \quad \Rightarrow \quad \pi r l = m \pi r^2.$$

Stąd otrzymujemy zależność promienia oraz tworzącej stożka:

$$l = mr.$$

Twierdzenie Pitagorasa:

W dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Szukaną zadania jest wysokość, którą przy powyższych danych możemy wyznaczyć z twierdzenia Pitagorasa:

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{r^2 \left(m^2 - 1\right)} = r\sqrt{m^2 - 1}.$$

Aby w pełni rozwiązać problem, wystarczy znaleźć promień podstawy stożka r. Z polecenia odczytujemy, że stożek powstaje z przekształcenia kuli. Wobec czego ich objętości muszą być identyczne, tzn. $V_s = V_k$.

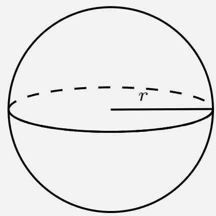
Kula:

Kula powstaje poprzez obrót dowolnego koła wokół jego średnicy $d = 2r$. Powierzchnię kuli nazywamy sferą. Pole kuli wyraża się wzorem:

$$P = 4\pi r^2,$$

a jej objętość:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$



Niech R będzie promieniem kuli, wówczas:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Po skróceniu i podstawieniu otrzymanego h, dostajemy:

$$r^3\sqrt{m^2-1} = 4R^3,$$

skąd bezpośrednio:

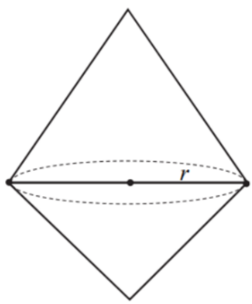
$$r = R\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{m^2-1}}}.$$

Promień podstawy szukanego stożka, powstałego z kuli o promieniu R, wynosi: $r = R\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{m^2-1}}}$, natomiast jego wysokość: $h = R\sqrt[3]{4(m^2-1)}$.

Komentarz do zadania:

Powyższe zadanie mogłoby znaleźć się na kartach współczesnej matury. Powinien poradzić sobie z nim każdy maturzysta podchodzący do matury rozszerzonej lub dobry uczeń zdający maturę podstawową – pomijając tych, np. z 2022–2024 r., których nie obowiązywał materiał z brył obrotowych... Przykładem zadania tego typu, na jakie obecnie można natrafić na maturze, jest np. następujące:

Dwa stożki o takich samych podstawach połączono podstawami w taki sposób jak na rysunku. Stosunek wysokości tych stożków jest równy 3:2. Objętość stożka o krótszej wysokości jest równa 12 cm^3. *Objętość bryły utworzonej z połączonych stożków jest równa...*



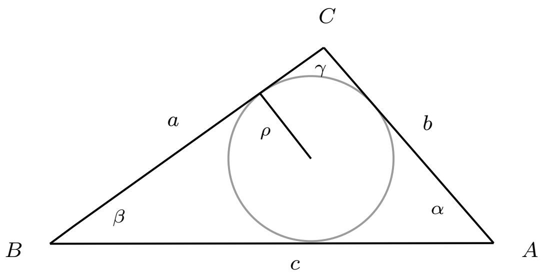
(zadanie zamknięte jednokrotnego wyboru, matura podstawowa z matematyki 2020 r.)

Zadania o tematyce zbliżonej do omawianego znaleźć można w dalszej części książki w Rozdziałach 12 oraz 21.

Zadanie 3
Rozwiąż trójkąt mając dane ρ, ρ_c, γ.
Źródło: [1, sygn. 235, str. 59, 62–64.], matura z 5.02.1908 r.

Uwaga: Poprzez polecenie „rozwiąż trójkąt” rozumiemy wyznaczenie długości boków trójkąta poprzez dane ρ, ρ_c oraz γ.

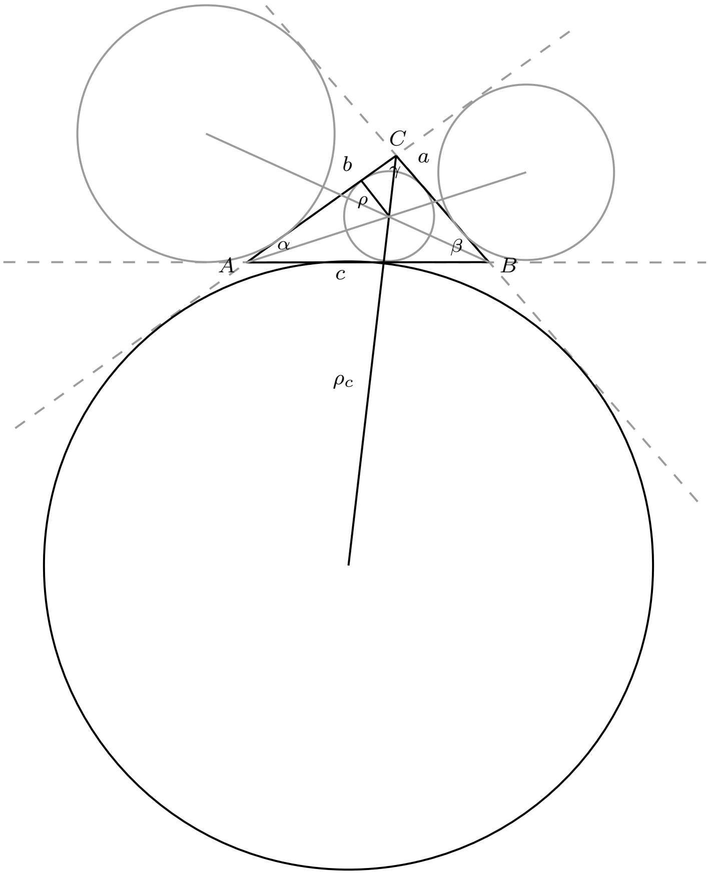
Rozwiązanie:
Zacznijmy od wyjaśnienia oznaczeń z polecenia: ρ oznacza promień okręgu wpisanego w dany trójkąt, ρ_c to promień okręgu dopisanego do boku naprzeciwko kąta γ. Przyjmijmy oznaczenia z poniższego rysunku: a, b, c są szukanymi długościami boków trójkąta, γ oznacza kąt przy wierzchołku C, α przy A, β przy B. Załóżmy bez straty ogólności, że $a \geqslant b$ (wówczas $\alpha \geqslant \beta$).



Wiemy, że pomiędzy danymi promieniami zachodzi zależność:

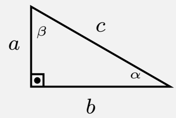
$$\rho = \rho_c \left(1 - \frac{c}{p}\right),$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.



Funkcje trygonometryczne:

Funkcje trygonometryczne danego kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym definiuje się jako stosunek długości odpowiednich dwóch boków tego trójkąta.



Sinus (ozn. sin) to stosunek przyprostokątnej a, leżącej naprzeciw kąta α, do przeciwprostokątnej c, tzn.:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Cosinus (ozn. cos) to stosunek przyprostokątnej b, leżącej przy kącie α, do przeciwprostokątnej c, tzn.:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Tangens (ozn. tg lub tan) to stosunek przyprostokątnej a, leżącej naprzeciw kąta α, do przyprostokątnej b, leżącej przy kącie α, tzn.:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

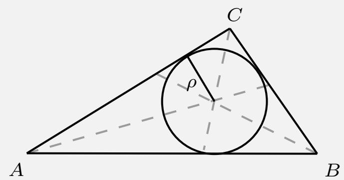
Wzory połówkowe:

Dla dowolnego trójkąta, znając długości jego boków, możemy zapisać poniższe relacje:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\\
\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\\
\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.
\end{aligned}$$

Okrąg wpisany w trójkąt:

Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu dwusiecznych trójkąta.



Promień okręgu wpisanego w trójkąt wyraża się wzorem:

$$\rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

gdzie p jest połową obwodu danego trójkąta.

Korzystając z powyższej postaci ρ, łatwo zauważyć, że wzór połówkowy dla γ przybiera postać:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{p-c}.$$

Podstawiając wcześniej wskazaną zależność, otrzymujemy również:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\rho_c\left(1-\frac{c}{p}\right)}{p-c} = \frac{\rho_c}{p}.$$

Dostaliśmy układ równań, z którego przekształcenia mamy:

$$\begin{cases} p - c = \frac{\rho}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \\ p = \frac{\rho_c}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \end{cases}$$

Podstawiając $p = \frac{a+b+c}{2}$, uzyskujemy:

$$\begin{cases} a + b - c = \frac{2\rho}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \\ a + b + c = \frac{2\rho_c}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \end{cases}$$

Dodając i odejmując stronami, otrzymujemy:

$$\begin{cases} a+b = \frac{\rho+\rho_c}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \\ c = \frac{\rho_c-\rho}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \end{cases}$$

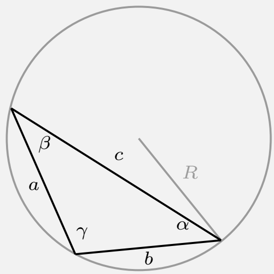
Zauważmy, że bok c jest już wyznaczony przy pomocy danych. Pozostało znaleźć zależności dla a i b.

Twierdzenie sinusów:

W dowolnym trójkącie na płaszczyźnie iloraz długości dowolnego boku i sinusa kąta naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na trójkącie, tzn.:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

gdzie R jest długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.



Z twierdzenia sinusów i faktu, że $\beta = 180° - \alpha - \gamma$, otrzymujemy:

$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{c\cdot\sin\left(180° - \alpha - \gamma\right)}{\sin\gamma}.$$

Wzory Mollweidego:

W dowolnym trójkącie spełnione są tożsamości:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{c} &= \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}},\\ \frac{a-b}{c} &= \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma}{2}}.\end{aligned}$$

Przypomnijmy, że wyznaczyliśmy już sumę:

$$a+b=\frac{\rho+\rho_c}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Skorzystajmy ze wzorów Mollweidego:

$$\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\rho+\rho_c}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)}{c}=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Arcus cosinus:

To funkcja odwrotna do funkcji cosinus rozpatrywanej na przedziale $[0,\pi]$. Oznacza to, że:

$$\arccos\left(\cos\alpha\right)=\alpha.$$

Obustronnie bierzemy arcus cosinus (korzystając z tego, że $\alpha\geqslant\beta$):

$$\arccos\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\rho+\rho_c}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)}{c}\right)=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Podstawiamy $\beta=180^\circ-\alpha-\gamma$:

$$2\arccos\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot(\rho+\rho_c)}{c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)=2\alpha-180^\circ+\gamma.$$

Ostatecznie α wyraża się poprzez:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot(\rho+\rho_c)}{c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right) + 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Wobec czego boki trójkąta dane są wzorami:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{c\cdot\sin\left(\arccos\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot(\rho+\rho_c)}{c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right) + 90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\gamma},\\
b &= \frac{c\cdot\sin\left(90^\circ - \arccos\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot(\rho+\rho_c)}{c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right) - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\gamma},\\
c &= \frac{\rho_c-\rho}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.
\end{aligned}$$

To kończy zadanie.

Komentarz do zadania:

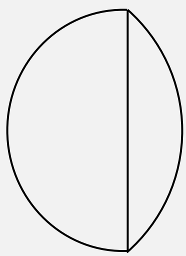
Jednym z nieaktualnych już zwyczajów w nauczaniu matematyki było „rozwiązywanie trójkątów". Można by rzec, że zagadnienie to stanowiło odrębny dział planimetrii. Powyższe zadanie jest godnym reprezentantem tego zjawiska. Analogiczne zadania wystąpiły w zestawach II (*zadanie 2*) i III (*zadanie 3*) tejże matury. Ponadto tendencję tę można zobaczyć również w zadaniach *Trójkąt z zadanym kątem* (patrz Rozdział 6) oraz *Odległość N od B* (patrz Rozdział 9). Trend przetrwał do lat sześćdziesiątych XX wieku. Czytelników chcących zagłębić się w tematykę „rozwiązywania trójkątów" zachęcamy do lektury książki Władysława Wojtowicza, Bronisława Bieleckiego i Mieczysława Czyżykowskiego, pt. „Trygonometria dla klas X i XI"[4], w której z dużą szczegółowością opisane zostały trygonometryczne zależności wskazujące związki poszczególnych elementów trójkąta oraz te stosowane do ich obliczeń. Dla większości przypadków technika rozwiązania została zalgorytmizowana. Powyższe zadanie mogłoby sprawić trudności współczesnym uczniom, jednakże abiturienci podchodzący do matury sprzed wieku winni byli ową metodykę dogłębnie znać.

Zadanie 4
Soczewka dwuwypukła tworzy obraz przedmiotu znajdującego się w odległości $a = 50\text{cm}$ w odległości $b = 15\text{cm}$ od niej. Jak duży jest jeden promień krzywizny soczewki, jeśli drugi wynosi $p = 10\text{cm}$, a współczynnik załamania $\mu = \frac{3}{2}$?
Źródło: [1, sygn. 235, str. 59–60, 64, 66.], matura z 5.02.1908 r.

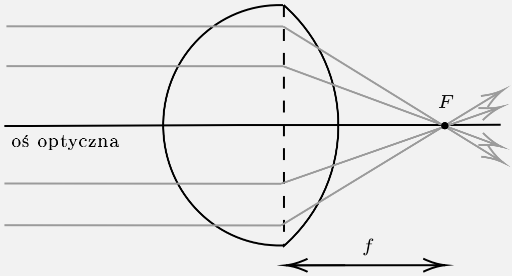
Rozwiązanie:

Soczewka dwuwypukła:

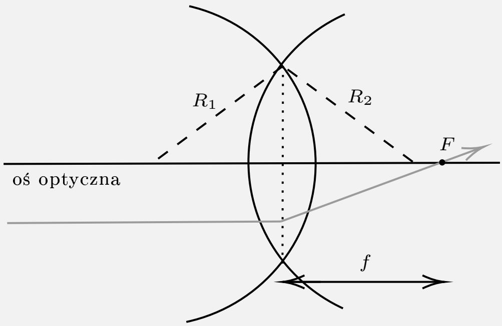
To soczewka wypukła, ograniczona z obu stron powierzchniami kulistymi wypukłymi, co ilustruje poniższy rysunek.



Poza omawianym przykładem, istnieją inne rodzaje soczewek wypukłych, jak płasko–wypukła czy wklęsło–wypukła. Soczewki wypukłe (w powietrzu) są skupiające, tzn. dzięki swojemu kształtowi skupiają wszystkie promienie światła rozchodzące się równolegle do jej osi optycznej w jednym punkcie, nazywanym **ogniskiem** soczewki F, na osi optycznej po przeciwnej stronie soczewki. Odległość od środka soczewki do jej ogniska nazywana jest **ogniskową** f.



Soczewkę zdefiniujemy jako **cienką**, jeżeli jej grubość jest znacząco mniejsza niżeli promienie krzywizny obu powierzchni załamujących. Wówczas uznaje się, że promienie są załamywane przez soczewkę tylko raz.



Zdolność skupiająca soczewki Z (przez optyków zwana mocą optyczną) zależy od promienia krzywizn obu powierzchni R_1, R_2 oraz od współczynników załamania materiału, z którego wykonana jest soczewka n_s, oraz otoczenia, w którym soczewka się znajduje n_o. Zgodnie z konwencją – promień jest dodatni dla powierzchni wypukłej (dla wklęsłej przyjęlibyśmy przeciwnie – ujemny).

$$Z = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_s}{n_o} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Zdolność skupiająca soczewki jest odwrotnością ogniskowej, jej jednostką podstawową jest $\frac{1}{m}$, czyli **dioptria**. Powyższy wzór czasem nazywany jest wzorem soczewkowym.

Równanie soczewki określa zależność pomiędzy odległością przedmiotu od soczewki x a odległością jego obrazu otrzymanego w tej soczewce y.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

W poleceniu zadania nie podano współczynnika załamania otaczającego soczewkę ośrodka. Wobec czego przyjmujemy, że znajduje się ona w powietrzu, dla którego $n_o \approx 1$. Skorzystamy zatem ze wzoru:

$$\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R}\right),$$

gdzie μ jest współczynnikiem załamania materiału, z którego wykonana jest soczewka, p podanym promieniem krzywizny, R szukaną zadania, czyli drugim promieniem krzywizny. Ze względu na brak informacji o ogniskowej, skorzystamy z równania soczewki, gdzie a jest odległością przedmiotu, a b jego obrazu:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Mamy zatem:

$$(\mu - 1)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$\left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{50} + \frac{1}{15}.$$

Z równania wyznaczamy szukaną R:

$$R = \frac{150}{11} = 13\frac{7}{11} \ \text{[cm]}.$$

Podsumowanie:

Dawne nauczanie matematyki koncentrowało się nie tylko na nauce teorii, ale i na zastosowaniach. Próbowano dokonać korelacji matematyki z innymi przedmiotami szkolnymi, jak fizyką czy geografią (patrz np. zadania z Części V oraz VI). Współcześnie zagadnienia wykraczające poza zakres matematyki pojawiają się na maturze sporadycznie, wnosząc jedynie ciekawy kontekst do zadania, np.

Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R = \log \frac{A}{A_0}$, *gdzie* A *oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach,* $A_0 = 10^{-4}\,cm$ *jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową.* 5 *maja* 2014 *roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile* $6,2$ *w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy – mniejsza od* $100cm$.
(matura podstawowa z matematyki 2016 r.)

Problemy w pełni skupione na innych dziedzinach, wymagające zrozumienia ich problematyki, pojawiają się w ramach tematycznych matur rozszerzonych.

Powyższe zadania, jak i te znajdujące się w przekroju całej publikacji, mogą okazać się wyzwaniem dla współczesnego abiturienta. Do tematów, które nie są obecnie omawiane na lekcjach matematyki i tym samym nie obowiązują na maturze, należy m.in. geometria sferyczna, omawiana przez nas w Części V książki. Zwróćmy jednak uwagę, że zadania przez nas rozpatrywane powstały ok. 120 lat temu. Matematyka nauczana w szkołach obejmowała tematy tyczące się większości najważniejszych osiągnięć z dziedziny tej nauki do XIX wieku. Kombinatoryka czy rachunek prawdopodobieństwa, których największy rozwój nastąpił w wieku XX, nie wchodziły w ten zakres, natomiast zagadnienia ich dotyczące spotykane są obecnie, w swojej najprostszej postaci, zarówno na maturze podstawowej, jak i rozszerzonej, np.

Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry $0, 5, 7$ *(np.* 57075, 55555*), jest...*
(zadanie zamknięte jednokrotnego wyboru, matura podstawowa z matematyki 2023 r.)

Dany jest pięcioelementowy zbiór $K = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. *Wylosowanie każdej liczby z tego zbioru jest jednakowo prawdopodobne. Ze zbioru* K *losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie i zapisujemy je w kolejności losowania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia* A *polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb jest liczbą parzystą. Zapisz obliczenia.*
(matura podstawowa z matematyki 2024 r.)

Ponadto, mimo że pojęcie granicy ciągu było wówczas znane, to obowiązująca do dziś jej definicja, pochodząca od Bernarda Bolzano i Karla Weierstrassa, została rozpowszechniona dopiero w czasach współczesnych dla naszych abiturientów, wobec czego nie obowiązywała na ówczesnym egzaminie maturalnym, natomiast występuje na obecnych w zakresie matury rozszerzonej, np.

Oblicz granicę $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{(x-2)^2}$. *Zapisz obliczenia.*
(matura rozszerzona z matematyki 2024 r.)

Można zakładać, że powyższe tematy stanowiłyby problem bądź co najmniej zaskoczenie dla naszych przodków podchodzących do ich rozwiązania.

Mówiąc o maturach sprzed wieku, należy zwrócić uwagę nie tylko na różnice w ich przebiegu czy zakresie obowiązującego materiału, ale i na liczbę podchodzących do niej uczniów! W roku 1908, zgodnie z danymi pochodzącymi ze Sprawozdania rocznego za rok szkolny 1907/08, str. 27 (patrz [1, sygn. 56]) do egzaminu przystąpiło 10 abiturientów: Czesław Chmielewski, Ludwik Jarosz, Roman Konkiewicz, Martin Krawczak, Friedrich Wilhelm Kritzinger, Kurt Leon, Benno Marohn, Czesław Obarski, Bronisław Robowski, Paul Wegner. Każdy z nich zdał – ponadto, przy niektórych nazwiskach została umieszczona adnotacja, mówiąca o zwolnieniu z egzaminu ustnego! Niestety w kontekście tej publikacji nie dysponujemy pełnymi danymi o zdawalności egzaminu maturalnego z badanych lat, w obrębie aktualnych granic Polski, ani wynikami egzaminów polskich maturzystów w ramach każdego z zaborów. Przedstawiamy więc jedynie statystyki dotyczące przystąpień do matury w omawianej przez nas placówce. Poprzez O rozumiemy Ostern, czyli termin wielkanocny, M oznacza Michaelis, tzn. termin świętomichalski, H to Herbst – termin jesienny, obowiązujący jeden raz. W roku 1915, ze względu na wojnę, odbyły się terminy awaryjne – letni (AL) oraz zimowy (AZ), miał miejsce również jeden termin wielkanocny.

O 1892 – 10	O 1894 – 7	M 1895 – 9	O 1895 – 9
M 1896 – 1	O 1897 – 8	O 1898 – 7	O 1899 – 9
O 1901 – 7	O 1902 – 6	O 1903 – 7	O 1904 – 8
O 1905 – 9	O 1906 – 12	H 1906 – 2	O 1907 – 11
O 1908 – 10	O 1909 – 17	M 1909 – 4	O 1910 – 11
O 1911 – 21	M 1911 – 1	O 1912 – 11	O 1913 – 14
O 1914 – 19	AL 1915 – 17	AZ 1915 – 1	O 1915 – 2

Autorka tekstu i rozwiązań: Adrianna Smolińska
Opieka merytoryczna: dr Jędrzej Garnek (zadania 1, 2, 3), prof. UAM dr hab. Wojciech Dybalski (zadanie 4).

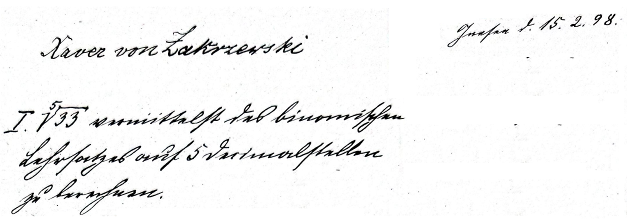
Część II

Algebra

1 Przybliżenie pierwiastka

Korzystając z twierdzenia o dwumianie, obliczyć liczbę $\sqrt[5]{33}$ z dokładnością do 5 miejsc po przecinku.

Źródło: [1, sygn. 181, str. 60 – 61], matura z 15.02.1898


Xaver von Zakrzewski
Posen d. 15. 2. 98.
I. $\sqrt[5]{33}$ vermittelst des binomischen Lehrsatzes auf 5 Dezimalstellen zu berechnen.

Treść zadania napisana przez zdającego – Ksawerego Zakrzewskiego, późniejszego współtwórcę wielkopolskiego harcerstwa

Rozwiązanie:

> **Wzór dwumianowy:**
>
> Pozwala na obliczenie n-tej potęgi sumy dwóch wyrażeń

algebraicznych. Mianowicie:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, zaś

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

to tzw. **symbol Newtona**. Wzór ten można uogólnić do przypadku, gdy $n \in \mathbb{R}$. Dostajemy wówczas następujący wzór dla $|y| < 1$:

$$(1+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} y^k,$$

gdzie

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}.$$

Zauważmy, że prawa strona tego wzoru jest szeregiem, czyli (w uproszczeniu) sumą nieskończoną.

Skorzystamy z powyższego wzoru dwumianowego dla $r = \frac{1}{5}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{33} &= \sqrt[5]{1+32} = (1+32)^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{5}}{k} \frac{1}{32^k} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{5 \cdot 32} + \dots \right. \\
&+ \left. \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)(\frac{1}{5}-3)(\frac{1}{5}-4)}{5! \cdot 32^5} + \dots \right) \\
&= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{160} - \frac{4}{51200} + \dots + \frac{9576}{12582912000000} - \dots \right) \\
&\approx 2 \cdot 1,006173308561325073242187 5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2,012346617122650146484375 \\
&\approx 2,01235.
\end{aligned}
$$

Spójrzmy na przybliżenie obliczone za pomocą kalkulatora:

$$\sqrt[5]{33} \approx 2,01235.$$

Otrzymany wynik jest poprawnym przybliżeniem!

Przy wykonywaniu powyższych obliczeń nasuwa się jednak naturalne pytanie: ile pierwszych wyrazów szeregu należy dodać, aby otrzymać odpowiednie przybliżenie? Aby podać przybliżenie z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku, powinniśmy mieć w miarę dobre oszacowanie na szóste miejsce po przecinku. Jeśli błąd naszego przybliżenia będzie mniejszy od 10^{-5}, to może się zdarzyć, że wyniesie on $\frac{9}{10^6}$, co wpłynie na złe zaokrąglenie piątego miejsca po przecinku. Przy błędzie przybliżenia mniejszym od 10^{-6}, szansa na błędne przybliżenie jest dużo mniejsza. Obliczmy zatem, dla jakiej liczby naturalnej a błąd przybliżenia

$$\left| 2 \sum_{k=a}^{\infty} \binom{\frac{1}{5}}{k} \frac{1}{32^k} \right|$$

jest mniejszy od 10^{-6}. Wykorzystamy w tym celu wzór na sumę szeregu geometrycznego.

Suma szeregu geometrycznego:

Szeregiem geometrycznym nazywamy szereg, którego składniki tworzą ciąg geometryczny (patrz strona 31), tzn. szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

gdzie $a, q \in \mathbb{R}$. Ze wzoru na sumę n pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego wynika, że szereg ten jest zbieżny, gdy $|q| < 1$ oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Ponieważ dla $k > 0$ mamy

$$\begin{aligned}
\left|\binom{\frac{1}{5}}{k}\right| &= \left|\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{5}-(k-1))}{k!}\right| \\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{(1-\frac{1}{5})(2-\frac{1}{5})\cdot\ldots\cdot(k-1-\frac{1}{5})}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)}\cdot\frac{1}{k} \\
&< \frac{1}{5k} \leqslant \frac{1}{5},
\end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned}
\left|2\sum_{k=a}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k}\right| &\leqslant \sum_{k=a}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k}\right| \\
&\leqslant 2\sum_{k=a}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32^k} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32^a}\cdot\frac{1}{32^k}\right) \\
&= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{32^a}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{32}} \\
&= \frac{2}{5}\cdot\frac{32}{32^a\cdot 31} = \frac{2}{5\cdot 31\cdot 32^{a-1}}.
\end{aligned}$$

Błąd przybliżenia jest mniejszy od 10^{-6} wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{2}{5\cdot 31\cdot 32^{a-1}} < \frac{1}{10^6}.$$

Podstawiamy za a kolejne liczby naturalne do momentu, gdy powyższa nierówność będzie spełniona. W szczególności dostajemy

$$\begin{aligned}
a = 3: &\qquad \frac{2}{5\cdot 31\cdot 32^{3-1}} = \frac{1}{79360} > \frac{1}{10^6}, \\
a = 4: &\qquad \frac{2}{5\cdot 31\cdot 32^{4-1}} = \frac{1}{2539520} < \frac{1}{10^6}.
\end{aligned}$$

Pokazuje to, że otrzymane wcześniej przybliżenie do piątego miejsca po przecinku było poprawne, aczkolwiek wystarczyło dodać tylko pierwsze cztery wyrazy szeregu (dla $k < 4$). Skoro z dokładnością do $\pm 10^{-6}$ mamy

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{33} \approx 2\sum_{k=0}^{3}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k} &= 2\left(1+\frac{1}{160}-\frac{4}{51200}+\frac{3}{2048000}\right)\\ &= 2\cdot 1,00617333984375 = 2,0123466796875,\end{aligned}$$

to szukane przybliżenie wynosi $\sqrt[5]{33} \approx 2,01235$.
Bez narzuconej metody, współcześnie podeszlibyśmy do problemu nieco inaczej.

Szereg Taylora:

To szereg potęgowy postaci

$$\begin{aligned}f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots\\ + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dots\\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\end{aligned}$$

gdzie $f^{(k)}(x_0)$ oznacza k-tą pochodną funkcji f w punkcie x_0, który jest punktem z dziedziny funkcji. Funkcja jest rozwijalna w szereg Taylora w punkcie x_0, gdy posiada pochodne każdego rzędu w tym punkcie. Jeżeli $x_0 = 0$, to szereg nazywamy szeregiem **Maclaurina**.

Twierdzenie Taylora:

Jeśli $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją $(k+1)$–krotnie różniczkowalną na przedziale (a,b), to pomiędzy dowolnymi punktami $x, x_0 \in (a, b)$ leży punkt c, dla którego zachodzi

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\
+ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Podstawowe wzory na pochodne:

- $a' = 0$ dla $a \in \mathbb{R}$,
- $x' = 1$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Liniowość pochodnej:

Dla dowolnych stałych a, b oraz funkcji różniczkowalnych (czyli takich, dla których istnieje pochodna) f oraz g prawdziwy jest wzór:

$$(af + bg)' = af' + bg'.$$

W celu przybliżenia pierwiastka skorzystamy z kilku pierwszych składników rozwinięcia funkcji $f(x) = \sqrt[5]{x}$ w szereg Taylora. Podstawmy $x = 33$ i $x_0 = 32$. To, ile składników powinniśmy wziąć, wywnioskujemy z twierdzenia Taylora: szukamy k o tej własności, że dla wszystkich $c \in (32, 33)$ mamy

$$\left| \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} \right| < \frac{1}{10^6},$$

to znaczy, biorąc $x = 33$, $x_0 = 32$, otrzymujemy

$$\left| \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} \right| < \frac{1}{10^6}.$$

Policzmy kolejne pochodne funkcji $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{5}\, x^{-\frac{4}{5}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}\, x^{-\frac{9}{5}}, \\ f'''(x) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5}\, x^{-\frac{14}{5}}. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że wzór na k–tą pochodną przyjmuje postać

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{5} - k + 1\right) x^{\frac{1}{5} - k}.$$

Zatem

$$\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} = \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{5} - k\right) c^{\frac{1}{5} - k - 1}}{(k+1)!}.$$

Otrzymaliśmy niemal to samo wyrażenie, co wcześniej! Ponieważ

$$\left|\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}\right| \leqslant \frac{c^{\frac{1}{5} - k - 1}}{5(k+1)} = \frac{c^{\frac{1}{5}}}{5(k+1)c^{k+1}} < \frac{3}{5(k+1)32^{k+1}},$$

więc wystarczy znaleźć liczbę naturalną k, dla której

$$\frac{3}{5(k+1)32^{k+1}} < \frac{1}{10^6}.$$

Widzimy, że

$$\begin{aligned} &\text{dla } k = 2: \qquad && \frac{3}{5 \cdot 3 \cdot 32^3} = \frac{1}{163840} > \frac{1}{10^6}, \\ &\text{dla } k = 3: \qquad && \frac{3}{5 \cdot 4 \cdot 32^4} = \frac{3}{20971520} < \frac{1}{10^6}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{33} \approx \sqrt[5]{32} &+ \frac{\frac{1}{5} \cdot 32^{-\frac{4}{5}}}{1!}(33 - 32) - \frac{\frac{4}{25} \cdot 32^{-\frac{9}{5}}}{2!}(33 - 32)^2 \\ &+ \frac{\frac{36}{125} \cdot 32^{-\frac{14}{5}}}{3!}(33 - 32)^3 \end{aligned}$$

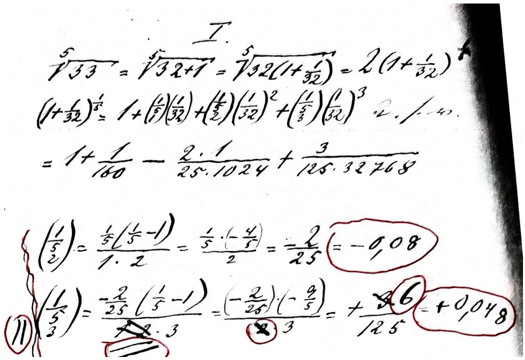
$$= 2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} - \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{2^9} + \frac{6}{125} \cdot \frac{1}{2^{14}}$$
$$= 2,0123466796875.$$

Tym sposobem otrzymujemy przybliżenie:

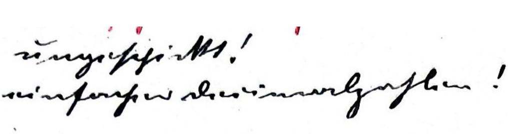
$$\sqrt[5]{33} \approx 2,01235.$$

Autorka rozwiązania: *Adrianna Smolińska*
Opieka merytoryczna: *dr Jolanta Marzec–Ballesteros*

Sylwetka abiturienta: Ksawery Zakrzewski, ur. 15 lutego 1876 r. w majątku Wełna (obecnie Goślinowo) koło Gniezna. Maturę zdawał w 1898 r. Studia medyczne odbywał w Lipsku i Würzburgu. Od 1905 r. prowadził praktykę lekarską w Poznaniu. Społecznik, działacz niepodległościowy, naczelnik poznańskiego „Sokoła”, współtwórca wielkopolskiego harcerstwa. Zmarł 18 listopada 1915 r. w Poznaniu.



Fragment rozwiązania Ksawerego Zakrzewskiego



Komentarz nauczyciela: „Niezdarne! Łatwiej pisać w systemie dziesiętnym!” (przetłumaczone z języka niemieckiego)

2

Dług

Ktoś pożycza 10000 marek. Jak duży będzie jego dług po $n = 20$ latach, jeśli nadal musi pożyczać $r_1 = 200$ marek na koniec każdego roku w pierwszych $\frac{n}{4}$ latach, ale może spłacać $r_2 = 500$ marek pod koniec każdego roku przez pozostałe $\frac{3}{4}n$ lat, przy rocznej stopie procentowej $p = 5\%$?

Źródło: [1, sygn. 160, str. 38–39, 45–46], matura z 5.02.1896 r., termin wielkanocny

Rozwiązanie:
Zaczynamy od obliczenia, ile wyniesie dług po $\frac{n}{4} = \frac{20}{4} = 5$ latach. Kapitał końcowy (bez uwzględnienia 200 marek pożyczki na koniec każdego roku) obliczamy ze wzoru na roczną kapitalizację odsetek po m latach (patrz str. 31) przy danych $K = 10000$ - kapitał początkowy, $p = 5\% = 0,05$ - roczna stopa procentowa, $m = 5$ - liczba lat:

$$K_5 = 10000 \cdot 1,05^5.$$

Następnie korzystamy ze wzoru na sumę m pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (patrz str. 31), aby wyliczyć, jak na dług wpłynęło dodatkowe 200 marek pożyczane na koniec każdego roku. U nas $m = 5$, $a_1 = r_1 = 200$, $q = 1,05$. Podstawiając te dane do wzoru, otrzymujemy

$$S_5 = 200 \cdot \tfrac{1-1,05^5}{1-1,05}.$$

Pozostało już tylko zsumować obie liczby, aby otrzymać dług po 5 latach:

$$K_5 + S_5 = 10000 \cdot 1,05^5 + 200 \cdot \tfrac{1-1,05^5}{1-1,05}.$$

Jest to nasz nowy kapitał początkowy.
Przechodzimy teraz do obliczenia wielkości długu po kolejnych $\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 20 = 15$ latach. Korzystamy z tego samego wzoru na roczną kapitalizację odsetek przy danych $K = K_5 + S_5$, $p = 0,05$, $m = 15$:

$$K_{15} = \left(10000 \cdot 1,05^5 + 200 \cdot \tfrac{1-1,05^5}{1-1,05}\right) \cdot 1,05^{15}.$$

Ze wzoru na sumę 15 wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie $1,05$ oraz $a_1 = r_2 = 500$ wyliczamy zysk wynikający ze spłaty 500 marek na koniec każdego roku:

$$S_{15} = 500 \cdot \tfrac{1-1,05^{15}}{1-1,05}.$$

Na koniec odejmujemy ten wynik od K_{15}:

$$K_{15} - S_{15} = \big(10000 \cdot 1,05^5 + 200 \cdot \frac{1-1,05^5}{1-1,05}\big) \cdot 1,05^{15} - 500 \cdot \frac{1-1,05^{15}}{1-1,05} = 18041,17[\text{marek}].$$

Autorka rozwiązania: *Klaudia Piwowarczyk*
Opieka merytoryczna: *dr Piotr Mizerka*

Sylwetka abiturienta: Eduard Wolfgang Wendorff, ur. 28 sierpnia 1876 r. w Zdziechowie pow. Gniezno. Maturę zdawał w gnieźnieńskim gimnazjum w 1896 r. Przez krótki czas studiował prawo. W powiecie gnieźnieńskim posiadał majątki w Zdziechowie, Mielnie i Modliszewie, dodatkowo dzierżawił majątek w Pomorzanowicach w ówczesnym pow. wschodniopoznańskim. Przed 1907 r. organizował wyprawy na Cejlon i w Himalaje. Zmarł 4 grudnia 1931 r.

3

Mieszkańcy Jarocina

Populacja Jarocina wzrosła w okresie od 1 grudnia 1900 do 1905 roku z 4355 do 5107 mieszkańców. Jak liczna będzie ludność miasta po 20 latach w dniu 1 grudnia 1925, jeśli wzrost w tym czasie nastąpi według tego samego procenta, a ponadto rocznie będzie napływać 15 osób?

Źródło: [1, sygn. 227, str. 52], matura z 14.02.1906 r.

Rozwiązanie:
Układamy równanie z wykorzystaniem wzoru na roczną kapitalizację odsetek po m latach (patrz str. 31) w celu obliczenia, według jakiego procenta dotychczas następował wzrost ludności. Nasze dane: $m = 1905 - 1900 = 5$ – liczba lat, $K = 4355$ – początkowa liczba ludności, $K_5 = 5107$ – liczba ludności po 5 latach. Otrzymujemy:

$$4355 \cdot (1 + p)^5 = 5107.$$

Wyznaczamy p ze wzoru:

$$p = \sqrt[5]{\tfrac{5107}{4355}} - 1.$$

Następnie korzystamy z tego samego wzoru, aby policzyć, jak wzrośnie ludność miasta po 20 latach (bez uwzględnienia tego, że rocznie napływa 15 osób). Nasze dane: $m = 20$ – liczba lat, $K = 5107$ – liczba ludności w dniu 1 grudnia 1905, $p = \sqrt[5]{\tfrac{5107}{4355}} - 1$ – roczna stopa procentowa. Uzyskujemy:

$$K_{20} = 5107 \cdot \sqrt[5]{\frac{5107}{4355}}^{20} = 5107 \cdot \left(\frac{5107}{4355}\right)^4 .$$

W celu policzenia, jak na liczbę ludności Jarocina wpłynie dodatkowych 15 osób napływających rocznie, korzystamy ze wzoru na sumę m wyrazów ciągu geometrycznego (patrz str. 31). U nas $m = 20$, $a_1 = 15$, $q = \sqrt[5]{\frac{5107}{4355}}$. Podstawiamy te dane do wzoru i otrzymujemy:

$$S_{20} = 15 \cdot \frac{1-\sqrt[5]{\frac{5107}{4355}}^{20}}{1-\sqrt[5]{\frac{5107}{4355}}} = 15 \cdot \frac{1-\left(\frac{5107}{4355}\right)^4}{1-\sqrt[5]{\frac{5107}{4355}}}.$$

Na koniec pozostało dodać do siebie oba wyniki, aby uzyskać liczbę ludności miasta w dniu 1 grudnia 1925 roku:

$$K_{20} + S_{20} = 5107 \cdot \left(\frac{5107}{4355}\right)^4 + 15 \cdot \frac{1-\left(\frac{5107}{4355}\right)^4}{1-\sqrt[5]{\frac{5107}{4355}}} \approx 10071.$$

Autorka rozwiązania: *Klaudia Piwowarczyk*
Opieka merytoryczna: *dr Paweł Płaczek*

Sylwetka abiturienta: Bronisław Kaźmierczak, urodzony 13 czerwca 1886 r. w Kopydłowie. W okresie międzywojennym proboszcz parafii witkowskiej, asesor dekanatu Września, działacz społeczny i wychowawca młodzieży. W sierpniu 1940 r. aresztowany przez Niemców. Osadzony najpierw w Szczeglinie, a następnie w obozie koncentracyjnym w Sachsemhausen koło Oranienburga, gdzie został zamęczony 21 września 1940 r.

Tablica pamiątkowa poświęcona ks. Bronisławowi Kaźmierczakowi w Witkowie

4 Równanie piątego stopnia

Rozwiąż poniższe równanie:

$$20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0.$$

Źródło: [1, sygn. 247, str. 6–8], matura z 23.02.1911 r.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od wyciągnięcia wyrazów podobnych przed nawias.

$$\begin{gathered}20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0\\ 20\left(x^5 + 1\right) - 81x\left(x^3 + 1\right) + 62x^2\left(x + 1\right) = 0.\end{gathered}$$

Dwukrotnie skorzystamy z poniższego wzoru.

Suma n-tych potęg:

Dla dowolnego nieparzystego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$a^n + b^n = (a + b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Dostajemy zatem:

$$\begin{aligned}20\left(x + 1\right)&\left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1\right)\\ &- 81x\left(x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)\\ &+ 62x^2\left(x + 1\right) = 0.\end{aligned}$$

Wyciągamy $(x+1)$ przed nawias:

$$(x+1)\left[20\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)-81x\left(x^2-x+1\right)+62x^2\right]=0.$$

Stąd mamy pierwsze miejsce zerowe $x=-1$. Pozostało wyliczyć równanie:

$$20\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)-81x\left(x^2-x+1\right)+62x^2=0.$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu:

$$20x^4-101x^3+163x^2-101x+20=0.$$

Zauważmy, że 0 nie jest rozwiązaniem (wówczas $20=0$ – sprzeczność), wobec czego podzielmy przez x^2:

$$20x^2-101x+163-101\frac{1}{x}+20\frac{1}{x^2}=0.$$

Po raz kolejny wyciągnijmy wspólny czynnik:

$$20\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-101\left(x+\frac{1}{x}\right)+163=0.$$

Ze względu na fakt, że $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2$, to równanie to możemy przedstawić w postaci:

$$20\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-101\left(x+\frac{1}{x}\right)+123=0.$$

W celu uzyskania trójmianu kwadratowego, stosujemy podstawienie $t=x+\frac{1}{x}$. Otrzymujemy wówczas:

$$20t^2-101t+123=0.$$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego:

Równanie kwadratowe to równanie, które można zapisać w postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie $a \neq 0$ oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$. Każde równanie tego typu można rozwiązać, korzystając z wyróżnika trójmianu kwadratowego, często nazywanego **deltą**:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Pozostając w ciele liczb rzeczywistych, jeżeli $\Delta > 0$, to równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie kwadratowe ma jedno rozwiązanie:

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Dla $\Delta < 0$, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań w ciele liczb rzeczywistych.

Wyliczamy miejsca zerowe:

$$\Delta_t = 361 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta_t} = 19.$$

Mamy:

$$t_1 = \frac{101 + 19}{40} = 3 \quad \text{oraz} \quad t_2 = \frac{101 - 19}{2} = \frac{41}{20}.$$

Wracając do podstawienia, otrzymujemy dwa równania do rozwiązania:

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad \text{oraz} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{41}{20}.$$

Z pierwszego:

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Delta_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta_1} = \sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Z drugiego:

$$20x^2 - 41x + 20 = 0$$

$$\Delta_2 = 81 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta_2} = 9$$

$$x_3 = \frac{41-9}{40} = \frac{4}{5} \quad \text{i} \quad x_4 = \frac{41+9}{40} = \frac{5}{4}.$$

Ostatecznym zbiorem rozwiązań równania jest

$$\left\{-1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}\right\}.$$

Przedstawimy teraz alternatywny sposób podejścia do tego problemu. W celu znalezienia pierwiastków wielomianu

$$W(x) = 20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20$$

zastosujemy poniższe twierdzenia.

Twierdzenie:

Jeżeli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_0 \neq 0$, o współczynnikach całkowitych, ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, natomiast q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

Twierdzenie Bezouta:

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem tego wielomianu.

W przypadku naszego wielomianu $a_n = 20 = a_0$. Dzielniki dwudziestki to: $1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20$. Potencjalne pierwiastki wymierne wielomianu $W(x)$ to: $1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, -\frac{1}{20}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}$. Kolejno sprawdzając powyższe możliwości, natrafiamy na pierwiastek -1, ponieważ:

$$W(-1) = 20(-1)^5 - 81(-1)^4 + 62(-1)^3 + 62(-1)^2 - 81(-1) + 20 = 0.$$

Schemat Hornera:

W celu podzielenia wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ przez wielomian $P(x) = x - \alpha$, postępujemy zgodnie z poniższym algorytmem.

1. Tworzymy trzywierszową tabelę, w której górnym wierszu, począwszy od drugiego miejsca, wpisujemy współczynniki wielomianu $W(x)$, zaczynając od stojącego przy najwyższej potędze x. Na przecięciu pierwszej kolumny i środkowego wiersza wpisujemy α.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_0
α				$\ldots$	
				$\ldots$	

2. Przepisujemy współczynnik a_n do drugiego miejsca trzeciego wiersza. Następnie mnożymy a_n przez α, a iloczyn wpisujemy pod a_{n-1} w drugim wierszu. Począwszy od trzeciej kolumny, dodajemy wpisane liczby wierszowo, sumę zapisując pod nimi w ostatnim wierszu. Powtarzamy proces aż do wypełnienia całej tabeli.

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_0
α		$\alpha \cdot a_n$	$\dots$	$\alpha \cdot b_1$
	a_n $= b_{n-1}$	$a_{n-1} + \alpha \cdot a_n$ $= b_{n-2}$	$\dots$	$a_0 + \alpha b_1$ $= b_0$

Wynikiem dzielenia jest wielomian $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1$ i reszta $R = b_0$. Możemy zapisać:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R.$$

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $P(x)$, wówczas $R = 0$.

Przechodzimy do podzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x+1)$. Zamiast pisemnego dzielenia, skorzystamy ze **schematu Hornera**:

	20	-81	62	62	-81	20
-1		-20	101	-163	101	-20
	20	-101	163	-101	20	0

Odczytując z tabeli, otrzymujemy:

$$(x+1)(20x^4 - 101x^3 + 163x^2 - 101x + 20) = 0.$$

Teraz uwagę skupiamy na wielomianie $P(x) = 20x^4 - 101x^3 + 163x^2 - 101x + 20$. Zauważmy, że ponownie $a_n = 20 = a_0$, zatem potencjalne pierwiastki wymierne wielomianu $P(x)$ pokrywają się z tymi wypisanymi dla wielomianu $W(x)$. Kolejno sprawdzając możliwości, znajdujemy pierwiastek $\frac{4}{5}$, ponieważ:

$$P\left(\frac{4}{5}\right) = 20\left(\frac{4}{5}\right)^4 - 101\left(\frac{4}{5}\right)^3 + 163\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 101\frac{4}{5} + 20 = 0.$$

Dzielimy wielomian $P(x)$ przez dwumian $\left(x - \frac{4}{5}\right)$:

	20	-101	163	-101	20
$\frac{4}{5}$		16	-68	76	-20
	20	-85	95	-25	0

Dzięki czemu mamy:

$$(x+1)\left(x-\frac{4}{5}\right)(20x^3-85x^2+95x-25)=0.$$

Ponownie odtwarzamy powyższy schemat działania, rozpisując potencjalne pierwiastki wymierne dla wielomianu $T(x)=20x^3-85x^2+95x-25$. Możliwości: $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, -\frac{1}{20}, 5, -5, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, 25, -25, \frac{25}{2}, -\frac{25}{2}, \frac{25}{4}, -\frac{25}{4}$, w których znajdujemy rozwiązanie $\frac{5}{4}$, uzasadniając:

$$T\left(\frac{5}{4}\right)=20\left(\frac{5}{4}\right)^3-85\left(\frac{5}{4}\right)^2+95\frac{5}{4}-25=0.$$

Po raz kolejny korzystamy ze schematu Hornera, dzieląc wielomian $T(x)$ przez dwumian $\left(x-\frac{5}{4}\right)$:

	20	-85	95	-25
$\frac{5}{4}$		25	-75	25
	20	-60	20	0

Wobec czego jest:

$$(x+1)\left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)(20x^2-60x+20)=0.$$

Pozostałe rozwiązania odczytamy, wyliczając pierwiastki trójmianu $S(x)=20x^2-60x+20=20(x^2-3x+1)$. Trójmian x^2-3x+1 pojawił się w poprzednim rozwiązaniu. Jego pierwiastkami są

$$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{oraz} \quad x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ostatecznie rozłożyliśmy wielomian $W(x)$ na iloczyn:

$$W(x)=20(x+1)\left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),$$

ponownie otrzymując zbiór rozwiązań: $\{-1, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$.

Ostatnia propozycja podejścia do zadania przeznaczona jest dla spostrzegawczych. Zaczynamy tak samo, jak w przypadku drugiego rozwiązania, otrzymując:

$$(x+1)(20x^4 - 101x^3 + 163x^2 - 101x + 20) = 0.$$

Drugi z nawiasów rozbijamy, uzyskując:

$$(x+1)(20x^4 - 16x^3 - 85x^3 + 68x^2 + 95x^2 - 76x - 25x + 20) = 0.$$

Szukamy wspólnych czynników:

$$(x+1)[4x^3(5x-4) - 17x^2(5x-4) + 19x(5x-4) - 5(5x-4)] = 0$$

$$(x+1)(5x-4)(4x^3 - 17x^2 + 19x - 5) = 0.$$

Ponownie rozbijamy wyrażenie z ostatniego nawiasu oraz wyłączamy wspólne czynniki:

$$(x+1)(5x-4)(4x^3 - 5x^2 - 12x^2 + 15x + 4x - 5) = 0$$

$$(x+1)(5x-4)[x^2(4x-5) - 3x(4x-5) + (4x-5)] = 0$$

$$(x+1)(5x-4)(4x-5)(x^2 - 3x + 1) = 0.$$

Rozwiązania trójmianu x^2-3x+1 znaleźliśmy we wcześniejszych podejściach. Po raz trzeci otrzymaliśmy ten sam zbiór rozwiązań.

Autorka rozwiązania: *Adrianna Smolińska*
Opieka merytoryczna: *dr Jolanta Marzec–Ballesteros*

Komentarz (Adrianna Smolińska):

Podobny problem pojawił się wśród zadań w 1899 *roku w zestawie A. Uczniowie poproszeni zostali o znalezienie rozwiązań równania* $8x^5-46x^4+47x^3+47x^2-46x+8=0$*. Zwróćmy uwagę, jak bliźniacze są to polecenia! Wielomiany są piątego stopnia, gdzie* $a_5 = a_0$*,* $a_4 = a_1$ *oraz* $a_3 = a_2$*.*

Ponadto w obu przypadkach znajdujemy dwie pary liczb dodatnich, jedną parę liczb ujemnych, a w tym dwie pary liczb parzystych oraz jedną parę liczb nieparzystych. Rozwiązanie tego analogicznego przypadku pozostawiamy dociekliwym czytelnikom. Przywołajmy kolejny przykład zadania, w którym należało rozwiązać równanie stopnia piątego – tym razem z matury z 1908 *r., z zestawu III (zadanie 1). Tutaj nieznacznie zmodyfikowano koncepcję, podając wielomian w którym* $a_5 = -a_0$, $a_4 = -a_1$ *oraz* $a_3 = -a_2$. *Można przypuszczać, że to jeden ze standardowych typów zadań pojawiających się na ówczesnych zadaniach.*

5

Skomplikowane Równanie

Rozwiąż poniższe równanie:

$$\frac{\sqrt[3]{(9+x)^2}+\sqrt[3]{(81-x^2)}+\sqrt[3]{(9-x)^2}}{\sqrt[3]{(9+x)^2}-\sqrt[3]{(81-x^2)}+\sqrt[3]{(9-x)^2}}=\frac{7}{3}.$$

Źródło: [1, sygn. 163, str. 1], matura z 24.02.1897 r.

Rozwiązanie:
Zastosujemy podstawienie. Niech $\alpha=\sqrt[3]{9+x}$ oraz $\beta=\sqrt[3]{9-x}$. Wówczas $\alpha\beta=\sqrt[3]{9+x}\sqrt[3]{9-x}=\sqrt[3]{(9+x)(9-x)}=\sqrt[3]{81-x^2}$. Wobec czego jest:

$$\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}=\frac{7}{3}.$$

Po przemnożeniu otrzymujemy:

$$3\alpha^2+3\alpha\beta+3\beta^2=7\alpha^2-7\alpha\beta+7\beta^2.$$

Dalej:

$$0=4\alpha^2-10\alpha\beta+4\beta^2.$$

Podzielmy przez 2:

$$0=2\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2.$$

Powyższe równanie można potraktować jak równanie kwadratowe zmiennej α, wówczas β staje się parametrem. Wydaje się, że powinniśmy rozważyć również odwrotną sytuację, gdzie β byłaby zmienną, a α parametrem. Zauważmy jednak, że $f(\alpha,\beta) = 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 = f(\beta,\alpha)$, tzn. tak zdefiniowana funkcja jest symetryczna, a zatem po zamianie ról α i β otrzymujemy identyczne wyniki. Wobec tego pozostaniemy przy pierwszej interpretacji i policzymy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta_\alpha = 25\beta^2 - 4\cdot 2\cdot 2\beta^2 = 9\beta^2$$

$$\sqrt{\Delta_\alpha} = 3\beta.$$

Oczywiście istnieje druga możliwość, gdy $\beta < 0$ – mianowicie: $\sqrt{\Delta_\alpha} = -3\beta$. Ze względu na fakt, że przypadek ten nie dostarcza nowych rozwiązań, pominiemy go, zostawiając jako ćwiczenie dla dociekliwego czytelnika. Otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$\alpha_1 = \frac{5\beta+3\beta}{2\cdot 2} = \frac{8\beta}{4} = 2\beta \quad \text{oraz} \quad \alpha_2 = \frac{5\beta-3\beta}{4} = \frac{\beta}{2}.$$

Uwzględniając podstawienie, uzyskujemy dwa układy równań:

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta = \sqrt[3]{9-x} \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{2} \\ \beta = \sqrt[3]{9-x} \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszy z tych układów:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[3]{9+x} & = & 2\sqrt[3]{9-x} \\ 9+x & = & 8(9-x) \\ 9x & = & 63 \\ x & = & 7. \end{array}$$

Przechodząc do drugiego układu, mamy:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[3]{9+x} & = & \dfrac{\sqrt[3]{9-x}}{2} \\ 8(9+x) & = & 9-x \\ 63 & = & -9x \\ x & = & -7. \end{array}$$

Dla sceptycznych przeprowadzimy sprawdzenie. Dla $x = 7$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{(9+7)^2}+\sqrt[3]{9^2-7^2}+\sqrt[3]{(9-7)^2}}{\sqrt[3]{(9+7)^2}-\sqrt[3]{9^2-7^2}+\sqrt[3]{(9-7)^2}} &= \frac{\sqrt[3]{256}+\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{256}-\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{4}}\\ &= \frac{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}}\\ &= \frac{7\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{4}}=\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Dla $x = -7$:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt[3]{(9+(-7))^2}+\sqrt[3]{9^2-(-7)^2}+\sqrt[3]{(9-(-7))^2}}{\sqrt[3]{(9+(-7))^2}-\sqrt[3]{9^2-(-7)^2}+\sqrt[3]{(9-(-7))^2}}\\ &= \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{256}}\\ &= \frac{7\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{4}}=\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Autorka rozwiązania: *Adrianna Smolińska*
Opieka merytoryczna: *dr Katarzyna Taczała*

Komentarz (Adrianna Smolińska):

Ciekawostką jest, że żaden z abiturientów piszących tę maturę nie rozwiązał powyższego zadania! Nie stanowi to zaskoczenia – problem wyróżnia się na tle pozostałych, występujących na poszytach maturalnych. Ma inny charakter, wobec czego, mimo braku zawiłości, mógł odstraszyć ówczesnego abiturienta.

Część III

Geometria planarna

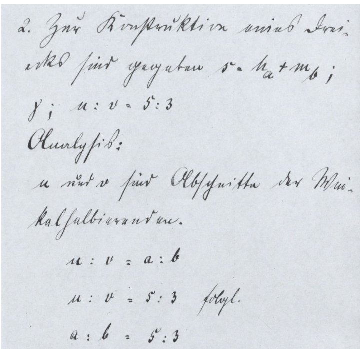
6

Trójkąt z zadanym kątem

Dany jest kąt o mierze γ. Skonstruuj trójkąt $\triangle ABC$, spełniający następujące warunki:

- $\sphericalangle ACB = \gamma$,
- dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB w stosunku $3:5$,
- suma długości wysokości opuszczonej z wierzchołka A oraz długości środkowej opuszczonej z wierzchołka B wynosi 5.

Źródło: [1, sygn. 202, str. 81 – 83], matura z 1.02.1900 r.



2. Zur Konstruktion eines Dreieckes sind gegeben $s = h_a + m_b$; γ; $u : v = 5 : 3$

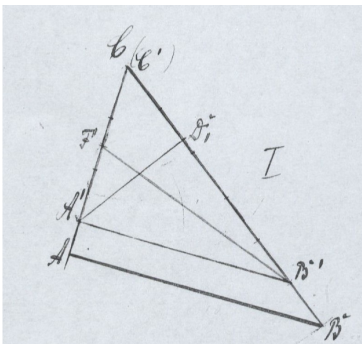
Analysis:

u und v sind Abschnitte der Winkelhalbierenden.

$u : v = a : b$

$u : v = 5 : 3$ folgl.

$a : b = 5 : 3$

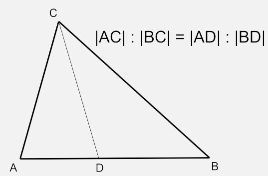


Treść zadania zapisana przez abiturienta oraz rysunek końcowy

Rozwiązanie:
Niech C będzie wierzchołkiem zadanego kąta o mierze γ. Zaznaczmy na ramionach tego kąta odcinki $A'C$ oraz $B'C$ o długościach 3 oraz 5.

Twierdzenie o dwusiecznej:

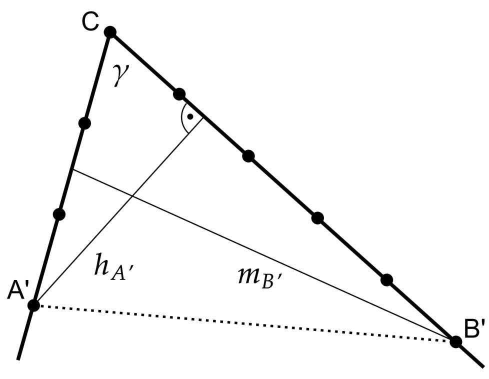
Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki, których długość jest proporcjonalna do długości pozostałych boków.



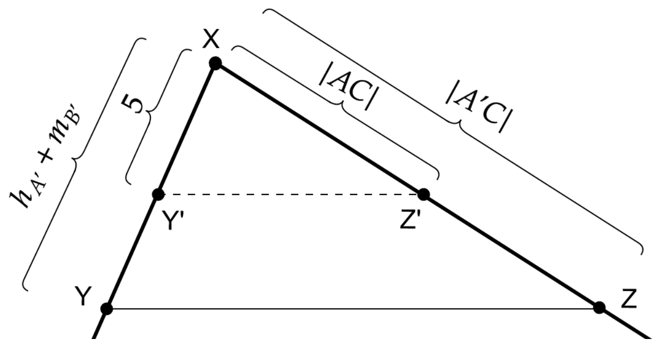
Z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie dostajemy:

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3}{5}.$$

Na podstawie cechy podobieństwa bok–kąt–bok trójkąt ABC jest zatem podobny do trójkąta $A'B'C$ (patrz str. 140).



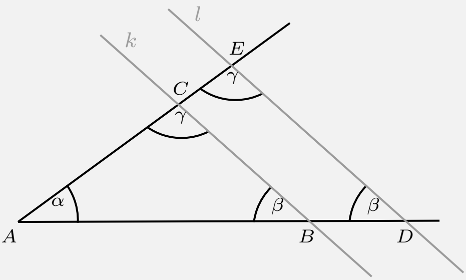
Oznaczmy przez $h_{A'}$ oraz $m_{B'}$ długości wysokości opuszczonej z wierzchołka A' oraz środkowej wychodzącej z wierzchołka B' w trójkącie $A'B'C$. Przez h_A oraz m_B będziemy oznaczali analogiczne długości w trójkącie ABC. Aby ustalić, o ile należy przeskalować trójkąt $A'B'C$, zmierzmy długości $h_{A'}, m_{B'}$ i narysujmy odcinek XY o długości $h_{A'} + m_{B'}$. Dorysujmy w dowolny sposób odcinek XZ o długości $|A'C|$, tworząc trójkąt XYZ (patrz rysunek).



Odłóżmy teraz na półprostej XY odcinek XY' długości 5. Niech Z' będzie takim punktem na półprostej XZ, że odcinek $Y'Z'$ jest równoległy do YZ.

Twierdzenie Talesa:

Jeżeli ramiona kąta przetniemy prostymi równoległymi, to stosunki odpowiednich otrzymanych odcinków będą równe.



Z rysunku możemy odczytać następujące proporcje:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|} = \frac{|AD|}{|AE|}$$

Powyższe stosunki pozostają prawdziwe również w przypadku, gdy prostymi równoległymi przetniemy kąty wierzchołkowe.

Wówczas z powyższego twierdzenia dostajemy:

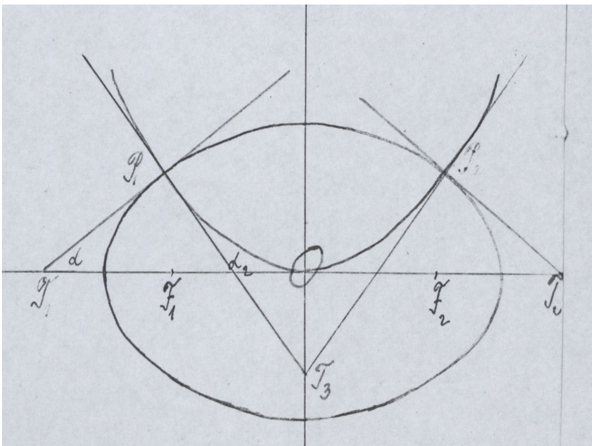
$$\frac{|XZ'|}{|A'C|} = \frac{5}{h_{A'} + m_{B'}} = \frac{h_A + m_B}{h_{A'} + m_{B'}}.$$

Jako że $\frac{h_A+m_B}{h_{A'}+m_{B'}}$ jest stosunkiem podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta $A'B'C$, dostajemy zatem $|XZ'| = |AC|$.
Na koniec pozostaje nam odłożyć na półprostej CA' odcinek o długości $|AC|$ (skonstruowany powyżej) i dorysować odcinek BA równoległy do $B'A'$.

Autor rozwiązania: *Cezary Dudkiewicz*
Opieka merytoryczna: *dr Jędrzej Garnek*

7
Elipsa i parabola

Dana jest elipsa o równaniu $x^2 + 2y^2 = 56$. Rozważmy parabolę o parametrze $p = 12$, której wierzchołkiem jest środek elipsy, i której oś jest zwrócona w kierunku mniejszej osi elipsy. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia elipsy i paraboli. Następnie oblicz kąty między stycznymi do tych figur w punktach przecięcia.
Źródło: [1, sygn. 253, str. 148 – 153], matura z 24.01.1913 r.

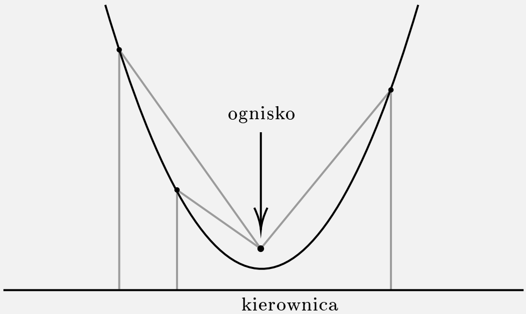


Rysunek do zadania wykonany przez abiturienta – Willy'ego Wegnera, 24.01.1913 r.

Rozwiązanie:

Parametr paraboli:

Parabola jest wykresem funkcji kwadratowej. Krzywą tą możemy jednak rozumieć jako zbiór punktów, których odległość od pewnego punktu, zwanego ogniskiem, jest równa odległości od prostej, nazywanej kierownicą.



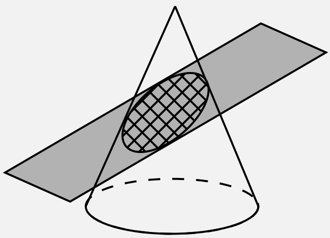
Odległość kierownicy paraboli od ogniskowej zwana jest jej parametrem. Dla paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ parametr ten wynosi $\frac{1}{2a}$.

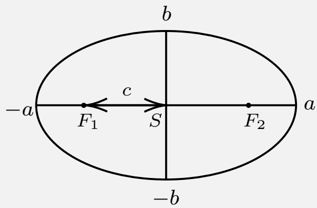
Jako że parametr paraboli wynosi 12 oraz przechodzi ona przez środek układu współrzędnych, jej równanie to:

$$y = \frac{1}{24}x^2.$$

Elipsa:

Elipsa jest jedną z krzywych stożkowych, tzn. powstających w wyniku przecięcia powierzchni stożkowej płaszczyzną.



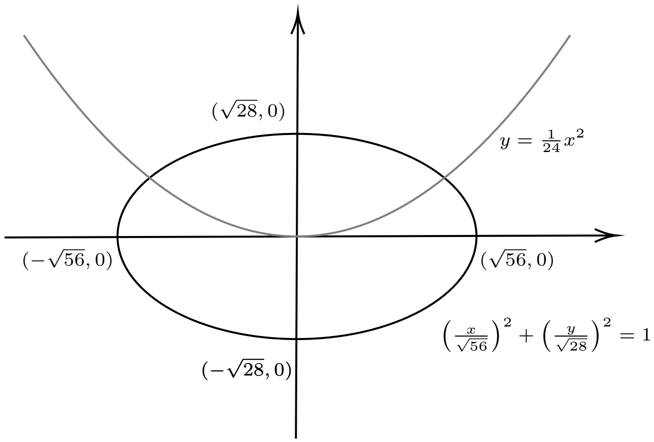


Kształt elipsy definiują jej ogniska F_1 i F_2 leżące na osi wielkiej, czyli punkty, których suma odległości od dowolnego punktu elipsy jest stała, równa $2a$. Przez oś wielką rozumiemy najdłuższą średnicę elipsy – odpowiada odległości między dwoma najbardziej oddalonymi punktami na elipsie. Oś mała to najkrótsza średnica elipsy. Środek elipsy S to punkt przecięcia małej i dużej osi elipsy. Półogniskową c nazywamy odległość ognisk od środka elipsy, daną zależnością $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Jeżeli $a = b = r$, to ogniska pokrywają się ze środkiem i wówczas staje się ona okręgiem o promieniu r! Równanie elipsy, której środek pokrywa się ze środkiem w kartezjańskim układzie współrzędnych:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Równanie elipsy w postaci kanonicznej wygląda następująco:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{56}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{28}}\right)^2 = 1.$$



Aby znaleźć punkty przecięcia elipsy i paraboli, rozważmy poniższy układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{24}x^2, \\ x^2 + 2y^2 = 56. \end{cases}$$

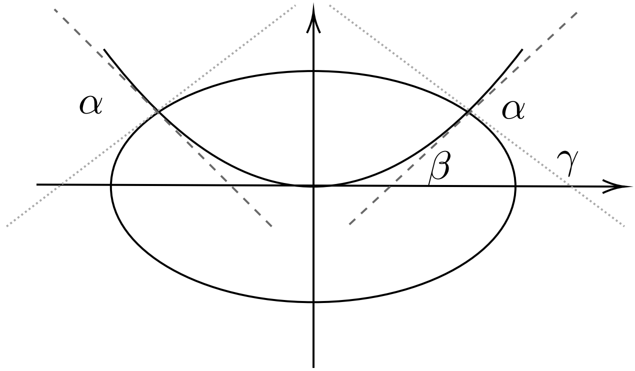
Podstawiając do drugiego równania pierwsze, dostajemy równanie kwadratowe:

$$y^2 + 12y - 28 = 0,$$

którego rozwiązaniami są $y_1 = -14$ oraz $y_2 = 2$. Jako że pierwsze z tych rozwiązań nie pochodzi od punktu na paraboli ($y_1 < 0$), otrzymujemy $x^2 = 24 \cdot 2 = 48$. Dostajemy dwa rozwiązania: $x_1 = -4\sqrt{3}$, $x_2 = 4\sqrt{3}$, które odpowiadają punktom przecięcia elipsy i paraboli:

$$(-4\sqrt{3}, 2) \quad \text{oraz} \quad (4\sqrt{3}, 2).$$

Szukamy miary kąta α pomiędzy stycznymi w punktach przecięcia elipsy i paraboli. Jest to symetryczna sytuacja, wobec czego skupimy się na stycznych przechodzących przez punkt $(4\sqrt{3}, 2)$.



Oznaczmy przez β miarę kąta nachylenia stycznej do paraboli do osi OX, zaś przez γ miarę kąta nachylenia stycznej do elipsy do osi OX. Wówczas $\alpha = \gamma - \beta$.

W dalszym ciągu rozwiązania skorzystamy z następujących wzorów na styczne do paraboli i elipsy.

Równanie stycznej:

Prostą styczną do paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ w punkcie (x_0, y_0) wyznaczamy ze wzoru:

$$y = (2ax_0 + b) \cdot (x - x_0) + y_0.$$

Równanie stycznej do elipsy $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ w punkcie (x_0, y_0) dane jest wzorem:

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

Powyższe relacje można w prosty sposób wyprowadzić ze wzoru na styczną wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie (x_0, y_0):

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

dla funkcji $f(x) = ax^2+bx+c$ oraz $f(x) = \sqrt{b \cdot (1 - \frac{x^2}{a})}$.

Styczna do paraboli $y = \frac{1}{24}x^2$ w punkcie $(4\sqrt{3}, 2)$ ma więc współczynnik kierunkowy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Zatem $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i (jako że $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$) $\beta = \frac{\pi}{6}$. Prosta styczna do rozważanej elipsy w punkcie $(4\sqrt{3}, 2)$ ma zaś następujące równanie:

$$\frac{4\sqrt{3}}{56}x + \frac{2}{28}y = 1.$$

Stąd wyznaczamy:

$$y = -\sqrt{3}x + 14.$$

Zatem $\operatorname{tg} \gamma = -\sqrt{3}$ oraz (jako że $\gamma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$) dostajemy $\gamma = \frac{2\pi}{3}$. Ostatecznie szukany kąt między stycznymi ma miarę:

$$\gamma - \beta = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Autorka rozwiązania: *Adrianna Smolińska*
Opieka merytoryczna: *dr Jędrzej Garnek*

Komentarz (Adrianna Smolińska):

Na współczesnej maturze z matematyki występują trzy spośród czterech krzywych stożkowych – okrąg, parabola i hiperbola. Niestety pominięte zostaje bardzo ważne pojęcie elipsy! Za odkrywcę krzywych stożkowych uważa się przyjaciela Platona – Menaichmosa. Początkowo nie widziano dla nich znaczących zastosowań. Jednakże nikt inny, jak Johannes Kepler udowadniając, że planety krążą po krzywych eliptycznych, a Słońce znajduje się w jednym z ich ognisk (I prawo Keplera), w wieku XVII znalazł ich niezwykle użyteczne zastosowanie, rozpromowując pojęcie elipsy. Z uwagi na to odkrycie naukowe, dotychczas doskonały kształt koła (Platon), zastąpiony został właśnie elipsą. Zmieniło to kanony estetyki, wywierając ogromny wpływ na budownictwo! Kształt eliptyczny mają, np. Plac św. Piotra w Watykanie czy padewskie Prata della Valle. Elipsa posiada bardzo interesującą własność, *mianowicie każda fala świetlna bądź dźwiękowa wychodząca z jednego z ognisk, odbita od jej krawędzi, wędruje przez drugie z nich. Bolesław Prus w swojej powieści „Faraon” [11] pisał o podstępie egipskich kapłanów, którzy wykorzystując powyższe zjawisko, próbowali skłócić lud egipski przeciwko faraonowi Ramzesowi XIII. Ówcześni abiturienci mieli to szczęście, by uczyć się o elipsach. Poza powyższym zadaniem, np. w roku 1899, wystąpiło:*

> *Dana jest elipsa o równaniu* $18y^2 + 7x^2 = 126$*. Jaki kąt tworzy styczna do elipsy w punkcie* $x = 3,\ y > 0$ *z dodatnią półosią* x*?*

8

Suma długości odcinków

Dany jest kąt o mierze 30° z wierzchołkiem w punkcie A. Z punktu należącego do jednego ramienia kąta opuszczono prostą prostopadłą do drugiego ramienia kąta. Następnie z uzyskanego punktu opuszczono prostą prostopadłą do pierwszego ramienia, otrzymując kolejny punkt przecięcia. Procedurę tę powtarzano, za każdym razem opuszczając prostą prostopadłą z aktualnego punktu na przeciwne ramię kąta. Oblicz sumę długości:

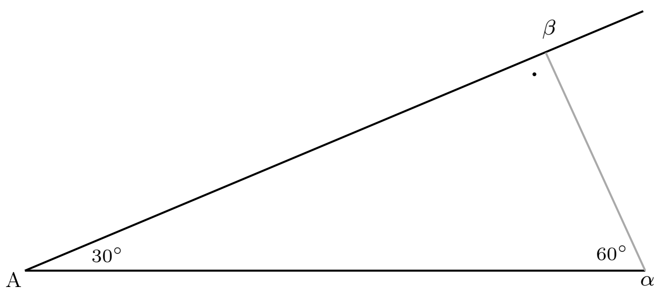
(a) pierwszych ośmiu takich odcinków,

(b) wszystkich takich odcinków.

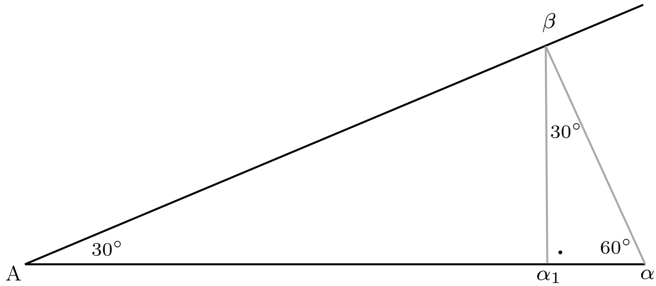
Źródło: [1, sygn. 247, str. 13–15], matura z 23.02.1911 r.

Rozwiązanie:

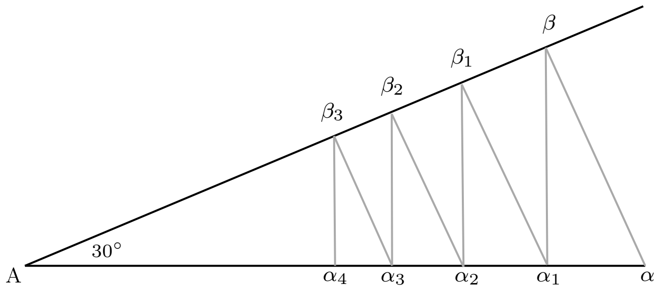
Zacznijmy od narysowania sytuacji z polecenia. Z jednego ramienia kąta prowadzimy prostą prostopadłą do drugiego ramienia.



Widzimy, że uzyskany $\triangle A\alpha\beta$ to trójkąt $30°, 60°, 90°$. Poprowadźmy kolejną prostą prostopadłą.



Powstały $\triangle \alpha_1\alpha\beta$ również jest trójkątem $30°, 60°, 90°$. Kontynuując tę operację, uzyskujemy coraz mniejsze trójkąty, wszystkie podobne z cechy Kąt - Kąt - Kąt (patrz str. 140).



Zauważmy, że szukamy sumy:

$$|\alpha\beta| + |\alpha_1\beta| + |\alpha_1\beta_1| + |\alpha_2\beta_1| + |\alpha_2\beta_2| + |\alpha_3\beta_2| + |\alpha_3\beta_3| + |\alpha_4\beta_3|\,.$$

Nie policzymy jednak wszystkich z tych odległości!
Niech $|A\alpha| = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Wówczas z $\triangle A\alpha\beta$ odczytujemy:

$$\sin 30° = \frac{|\alpha\beta|}{|A\alpha|} = \frac{|\alpha\beta|}{a} \quad \Rightarrow \quad |\alpha\beta| = a\sin 30° = \frac{a}{2}.$$

Z $\triangle \alpha_1\alpha\beta$ dostajemy:

$$\cos 30° = \frac{|\alpha_1\beta|}{|\alpha\beta|} \quad \Rightarrow \quad |\alpha_1\beta| = |\alpha\beta|\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Podobnie, analizując $\triangle \beta_1\alpha_1\beta$ otrzymujemy:

$$\cos 30^\circ = \frac{|\alpha_1\beta_1|}{|\alpha_1\beta|} \quad \Rightarrow \quad |\alpha_1\beta_1| = |\alpha_1\beta| \cos 30^\circ = \frac{3a}{8}$$

(definicje funkcji trygonometrycznych przypomnieliśmy na stronie 39). Widzimy, że każdy kolejny odcinek jest krótszy od poprzedniego $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ razy. Możemy to oczywiście łatwo pokazać:

$$\frac{|\alpha_1\beta|}{|\alpha\beta|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{3a}{8}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{|\alpha_1\beta_1|}{|\alpha_1\beta|}.$$

Aby obliczyć sumę ośmiu takich wyrazów, skorzystamy ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu geometrycznego (patrz str. 31). Wobec powyższego, otrzymujemy:

$$S_8 = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{175a}{256(2 - \sqrt{3})} = 175(2 + \sqrt{3})a,$$

co kończy pierwszą część zadania. Aby odpowiedzieć na drugie pytanie, skorzystamy ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego (patrz str. 55). Wystarczy policzyć:

$$\frac{\frac{a}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2 - \sqrt{3}} = a\left(2 + \sqrt{3}\right).$$

Otrzymaliśmy więc szukaną sumę długości wszystkich odcinków.

Autorka rozwiązania: *Adrianna Smolińska*
Opieka merytoryczna: *prof. UAM dr hab. Michał Jasiczak*

9

Odległość N od B

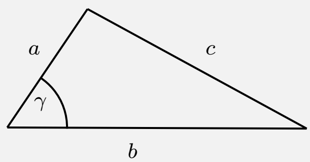
Z punktu N celujemy w punkty A, B i C, które leżą w tej samej płaszczyźnie z N i są od siebie oddalone $AB = c = 73,24m$, $BC = a = 82,73m$, $CA = b = 65,48m$. B i C pojawiają się w linii prostej patrząc od N, czyli B pomiędzy N i C. Natomiast A widziane jest z N w stronę B pod kątem $BNA = \delta = 27^o18'$. Jak daleko jest N od B?

Źródło: [1, sygn. 202, str. 62 – 65, matura z 1.02.1900 r.]

Rozwiązanie:

Twierdzenie cosinusów:

W dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

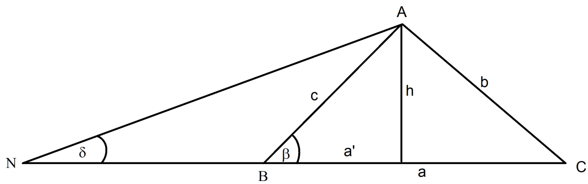


Korzystając z oznaczeń powyższego rysunku, możemy zapisać:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Gdy trójkąt jest prostokątny i kąt γ jest kątem prostym, relacja ta sprowadza się do twierdzenia Pitagorasa (patrz str. 35), jako że $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Zacznijmy od wykonania rysunku pomocniczego.



Z powyższego twierdzenia wiemy, że:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta$$

$$cos(\beta) = \frac{65,48^2 - 73,24^2 - 82,73^2}{-2\cdot 82,73\cdot 73,24}$$

Wynika z tego, że:

$$cos(\beta) = 0,6536.$$

Korzystając z funkcji arcus cosinus (patrz str. 43) oraz kalkulatora, obliczamy wartość kąta $\beta \approx 49,19^o$ oraz $\sin(\beta) \approx 0,7569$. Mając $\cos(\beta)$ i $\sin(\beta)$, skorzystamy z definicji funkcji sinus oraz cosinus i obliczymy długości odcinków a' i h (patrz str. 39).

$$cos(\beta) = \frac{a'}{c}$$

$$a' = cos(\beta)\cdot c$$

$$a' = 0,6536\cdot 73,24$$

$$a' = 47,87m$$

$$sin(\beta) = \frac{h}{c}$$

$$h = sin(\beta) \cdot c$$
$$h \approx 0,7569 \cdot 73,24$$
$$h \approx 55,44m$$

Teraz, znając te długości, ponownie skorzystamy z programu WolframAlpha celem odczytania wartości $\text{tg}(\delta)$, która wynosi w przybliżeniu $0,5161$. Z definicji funkcji tangens jesteśmy w stanie dojść do długości odcinka $|NB|$:

$$\text{tg}(\delta) = \frac{h}{|NB| + a'}$$
$$|NB| = \frac{h}{\text{tg}(\delta)} - a'$$
$$|NB| \approx \frac{55,44}{0,5161} - 47,87$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$|NB| \approx 59,55m.$$

Autor rozwiązania: *Adam Nawrocki*
Opieka merytoryczna: *dr Katarzyna Taczała*

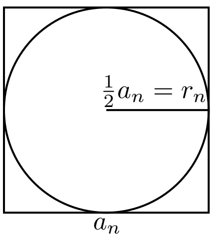
10

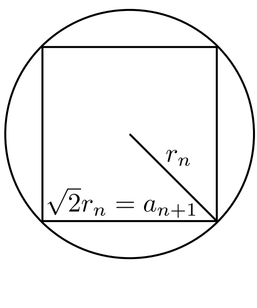
Ciąg kwadratów

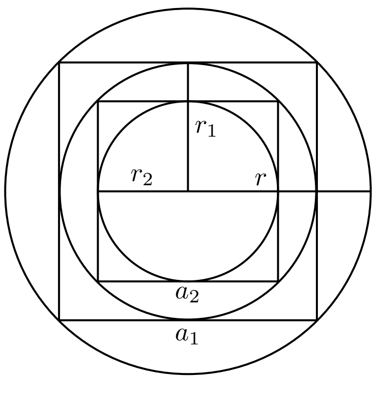
Kwadrat jest wpisany w koło o promieniu r, koło w kwadrat, kwadrat w to koło i tak dalej do punktu środkowego. Jaka jest suma wszystkich pól zbudowanych kół poza danym i jaka jest suma pól wszystkich kwadratów?

Źródło: [1, sygn. 237, str. 15 – 16], matura z 7.09.1909 r.

Rozwiązanie:







Niech a_n oraz r_n dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczają odpowiednio długość boku $n-$tego kwadratu, oraz promień $n-$tego koła (poza kołem początkowym). Z treści zadania oraz prostych obserwacji geometrycznych (patrz rysunki powyżej) otrzymujemy zatem poniższe rekurencje:

$$\begin{cases} a_n & = \sqrt{2} r_{n-1} \\ r_n & = \frac{1}{2} a_n \\ a_1 & = \sqrt{2} r, \end{cases}$$

gdzie r jest stałą podaną w treści zadania. Z rekurencji otrzymujemy dwa ciągi geometryczne (patrz str. 31):

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{2} r_{n-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} a_{n-1} \\ a_1 = \sqrt{2} r \end{cases} \qquad \begin{cases} r_n = \dfrac{1}{2} a_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_{n-1} \\ r_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r, \end{cases}$$

których rozwiązaniami są

$$\begin{aligned} a_n =& \sqrt{2} r \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n} r, \\ r_n =& \frac{\sqrt{2}}{2} r \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n} r. \end{aligned}$$

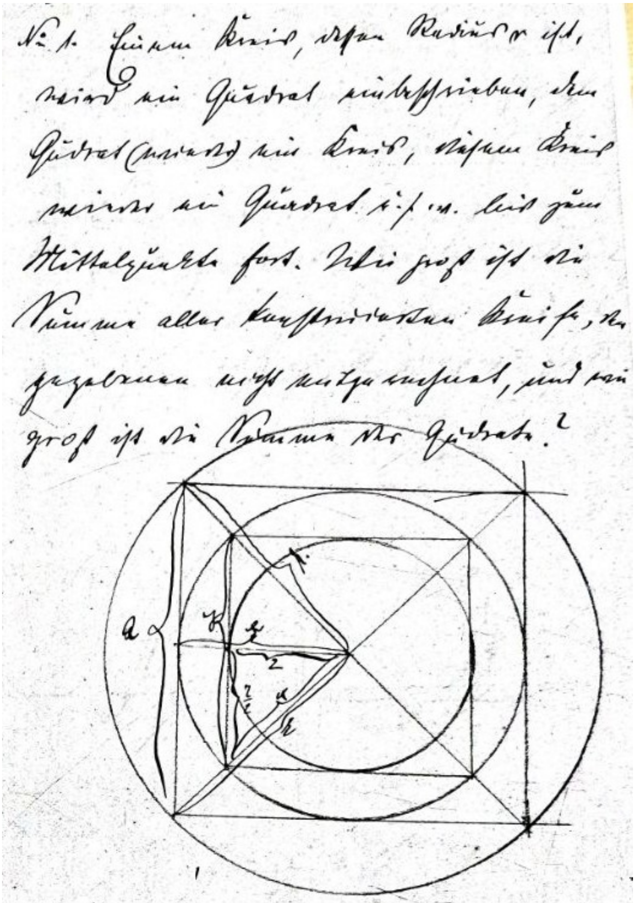
Żeby otrzymać odpowiedzi, wystarczy zsumować pola i zastosować wzór na sumę szeregu geometrycznego (patrz strona 55). Przez P_O oznaczymy sumę pól kół, a przez P_K oznaczymy sumę pól kwadratów.

$$\begin{aligned} P_O = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \ldots = \pi \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = \pi r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2n} \\ = \pi r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n} = \pi r^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \pi r^2 \end{aligned}$$

oraz analogicznie

$$P_K = a_1^2 + a_2^2 + \ldots = (2r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2n} = 4r^2.$$

Autor rozwiązania: *Cezary Dudkiewicz*
Opieka merytoryczna: *dr Piotr Mizerka*


No 1. Einem Kreis, dessen Radius r ist, wird ein Quadrat einbeschrieben, dem Quadrat (wieder) ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat u.s.w. bis zum Mittelpunkte fort. Wie groß ist die Summe aller konstruierten Kreise, den gegebenen nicht mitgerechnet, und wie groß ist die Summe der Quadrate?

Treść zadania zapisana przez J. Ślebiadę, 7.9.1909 r.

11

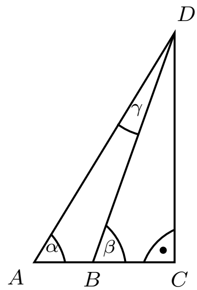
Góra

Jak wysoko jest góra, której szczyt wyłania się z punktów końcowych linii poziomej o długości 200m poprowadzonej w kierunku góry pod kątem wzniesienia $\alpha = 16°4'17''$, $\beta = 19°43'23''$.

Źródło: [1, sygn. 181, s 19, 25–26], matura z 15.02.1898 r.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od narysowania sytuacji z polecenia.



Z treści zadania odczytujemy, że $|AB| = 200\text{m}$, $\alpha = 16°4'17''$ oraz $\beta = 19°43'23''$. Szukaną odległością jest $|CD|$, czyli wysokość trójkąta $\triangle ABC$. Kąt γ można wyliczyć następująco:

$$\gamma = 180° - (180° - \beta) - \alpha = \beta - \alpha.$$

Po podstawieniu danych wartości kątów:

$$\gamma = 19°43'23'' - 16°4'17'' = 3°38'6''.$$

Powołując się na twierdzenie sinusów (patrz str. 42), możemy zapisać zależność:

$$\frac{|AB|}{\sin\gamma} = \frac{|BD|}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad |BD| = |AB|\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Kolejno, z definicji sinusa otrzymujemy:

$$\sin\beta = \frac{|CD|}{|BD|} \quad \Rightarrow \quad |CD| = |BD|\sin\beta.$$

Łącząc oba wzory, łatwo wyliczymy szukaną wysokość:

$$\begin{aligned} |CD| &= |AB|\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\sin\beta \\ &= 200\cdot\frac{\sin 16^\circ 4' 17''}{\sin 3^\circ 38' 6''}\cdot\sin 19^\circ 43' 23'' \\ &\approx 200\cdot\frac{0,2768}{0,0634}\cdot 0,3375 \\ &\approx 294,7\,[m]\,. \end{aligned}$$

Zatem szczyt góry znajduje się na wysokości 294,7 metrów.

Autorka rozwiązania: *Adrianna Smolińska*
Opieka merytoryczna: *prof. UAM dr hab. Michał Jasiczak*

Komentarz (Adrianna Smolińska):

Powyższe zadanie współcześnie sformułowalibyśmy następująco:

Podstawa trójkąta wynosi 200, a kąty przy podstawie mają miary α oraz $180^\circ - \beta$. Oblicz wysokość tego trójkąta prostopadłą do wymienionej podstawy.

Pozbawiając treść polecenia kontekstu praktycznego („góra”) oraz niezręcznych wartości kątów, zadanie staje się uniwersalne i przejrzyste.

Część IV

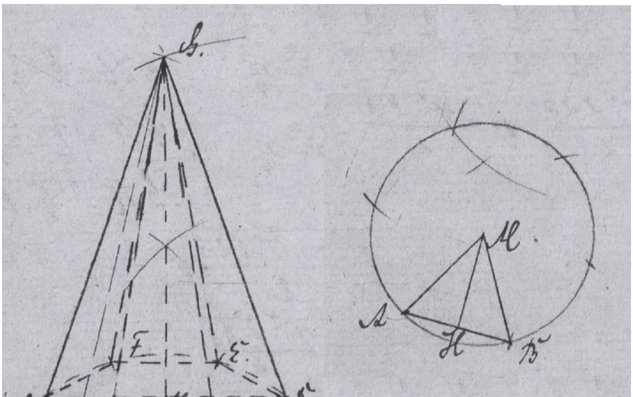
Stereometria

12

Stożek i ostrosłup

Podstawą stożka jest koło o promieniu r. Stożek ten ma wysokość wspólną z ostrosłupem prostym, którego podstawą jest sześciokąt foremny, wpisany w podstawę stożka. Wysokości brył są równe $\frac{5}{2}r$. Jakie są objętości, długości krawędzi i pola powierzchni obu brył?

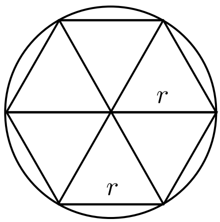
Źródło: [1, sygn. 203, str. 17 – 20], matura z 22.02.1900 r.

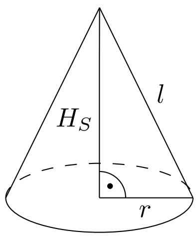


Rysunek do zadania wykonany przez Ericha Haesnera, 22.2.1900 r.

Rozwiązanie:
Wystarczy po kolei stosować klasyczne wzory geometryczne, które podajemy poniżej przed każdym zastosowaniem. Stosujemy też kilkukrotnie twierdzenie Pitagorasa (patrz str. 35) – w takich sytuacjach wskazujemy rysunek, na którym zaznaczono odpowiedni trójkąt prostokątny. Obliczymy najpierw wymiary podstaw brył. Pole koła stanowiącego podstawę stożka wynosi oczywiście $P_k = \pi r^2$ (patrz str. 34). Promień okręgu, r, stanowi również długość boku sześciokąta. Pole sześciokąta stanowiącego podstawę ostrosłupa wynosi zatem:

$$P_p = 6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2.$$





Wysokość stożka, którą oznaczymy przez H_S, wynosi $H_S = \frac{5}{2}r$. Pozwala to na obliczenie objętości stożka:

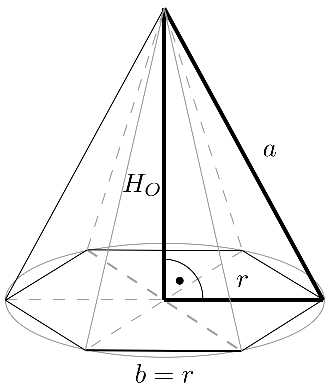
$$V_S = \frac{1}{3}\pi r^2 H_S = \frac{5}{6}\pi r^3.$$

Do obliczenia długości tworzącej stożka, oznaczanej l, zastosujemy twierdzenie Pitagorasa (patrz strona 35) dla trójkąta z rysunku powyżej:

$$l^2 = H_S^2 + r^2 = \frac{25}{4}r^2 + r^2 = \frac{29}{4}r^2,$$

zatem $l = \frac{\sqrt{29}}{2}r$. Mając wartość l, możemy podać wzór na pole powierzchni stożka:

$$P_S = P_k + \pi r l = \pi r\left(r + \frac{\sqrt{29}}{2}r\right) = \pi r^2\left(1 + \frac{\sqrt{29}}{2}\right).$$



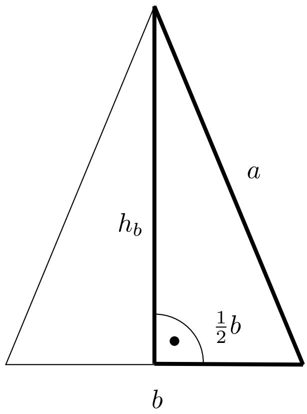
Zajmiemy się teraz ostrosłupem. Jak wynika z treści zadania, jego wysokość ma długość $H_O = \frac{5}{2}r$, zaś krawędź podstawy długość r. Objętość ostrosłupa wynosi zatem:

$$V_O = \frac{1}{3}H_O P_p = \frac{5\sqrt{3}}{4}r^3.$$

Oznaczmy długość krawędzi bocznej przez a. Wartość tą wyznaczymy, korzystając ponownie z twierdzenia Pitagorasa (patrz rysunek powyżej):

$$a^2 = H_O^2 + r^2 = l^2,$$

zatem $a = l = \frac{\sqrt{29}}{2}r$. Wysokość ściany bocznej, h_b, wyznaczamy



rozważając trójkąt prostokątny z rysunku powyżej:

$$h_b^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{29-1}{4}r^2 = 7r^2,$$

zatem $h_b = \sqrt{7}r$. Pole ściany bocznej, P_b, możemy zatem wyznaczyć z następującego wzoru:

$$P_b = \frac{1}{2}rh_b = \frac{\sqrt{7}}{2}r^2.$$

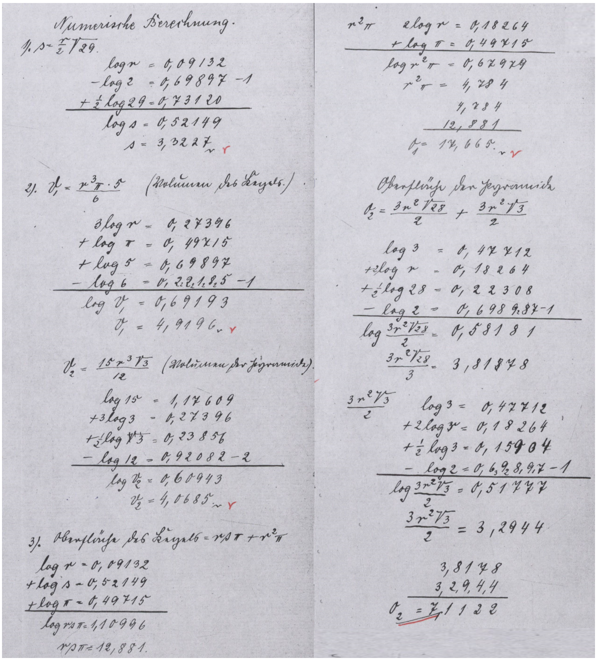
Na sam koniec pozostaje nam znalezienie pola powierzchni ostrosłupa:

$$P_O = 6 \cdot P_b + P_p = 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}r^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2 = 3r^2\left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Autor rozwiązania: *Cezary Dudkiewicz*
Opieka merytoryczna:
prof. UAM dr hab. Małgorzata Bednarska–Bzdęga

Komentarz (Cezary Dudkiewicz oraz prof. UAM dr hab. Małgorzata Bednarska–Bzdęga):

Ówczesne zadania często składały się z dwóch części. W pierwszej wyprowadzano wzór, a w drugiej podstawiano podaną wartość. W tym przypadku polecenie wymagało obliczenia w przybliżeniu każdego z wymiarów dla wartości $r = 1,234$. *Poniżej zawarte są obliczenia abiturienta, do których wykorzystał tablice logarytmiczne (patrz Dodatek, str. 209).*



Numerische Berechnung.

1). $s = \frac{r}{2}\sqrt{29}$.

$\log r = 0{,}09132$
$-\log 2 = 0{,}69897 - 1$
$+\frac{1}{2}\log 29 = 0{,}73120$
$\log s = 0{,}52149$
$s = 3{,}3227$ r

2). $V_1 = \frac{r^3\pi \cdot 5}{6}$ (Volumen des Kegels.)

$3\log r = 0{,}27396$
$+\log \pi = 0{,}49715$
$+\log 5 = 0{,}69897$
$-\log 6 = 0{,}22185 - 1$
$\log V_1 = 0{,}69193$
$V_1 = 4{,}9196$ r

$V_2 = \frac{15 r^3\sqrt{3}}{12}$ (Volumen der Pyramide).

$\log 15 = 1{,}17609$
$+3\log 3 = 0{,}27396$
$+\frac{1}{2}\log \sqrt{3} = 0{,}23856$
$-\log 12 = 0{,}92082 - 2$
$\log V_2 = 0{,}60943$
$V_2 = 4{,}0685$ r

3). Oberfläche des Kegels $= rs\pi + r^2\pi$

$\log r = 0{,}09132$
$+\log s = 0{,}52149$
$+\log \pi = 0{,}49715$
$\log rs\pi = 1{,}10996$
$rs\pi = 12{,}881$.

$r^2\pi$ $2\log r = 0{,}18264$
$+\log \pi = 0{,}49715$
$\log r^2\pi = 0{,}67979$
$r^2\pi = 4{,}784$

4,784
12,881
$O_1 = 17{,}665$ r

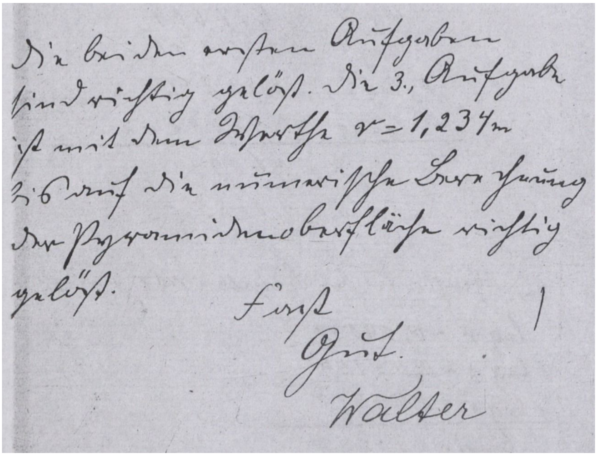
Oberfläche der Pyramide
$O_2 = \frac{3r^2\sqrt{28}}{2} + \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$

$\log 3 = 0{,}47712$
$+2\log r = 0{,}18264$
$+\frac{1}{2}\log 28 = 0{,}22308$
$-\log 2 = 0{,}69897 - 1$
$\log \frac{3r^2\sqrt{28}}{2} = 0{,}58181$
$\frac{3r^2\sqrt{28}}{3} = 3{,}81878$

$\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$ $\log 3 = 0{,}47712$
$+2\log r = 0{,}18264$
$+\frac{1}{2}\log 3 = 0{,}15904$
$-\log 2 = 0{,}69897 - 1$
$\log \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} = 0{,}51777$
$\frac{3r^2\sqrt{3}}{2} = 3{,}2944$

3,8178
3,2944
$O_2 = 7{,}1122$

Rozwiązanie sporządzone przez Ericha Haesnera, dnia 22.2.1900 r. Literką r nauczyciel oznaczał poprawne fragmenty rozwiązania (od niemieckiego *richtig* – poprawnie)


Die beiden ersten Aufgaben
sind richtig gelöst. Die 3. Aufgabe
ist mit dem Werthe $r = 1,234\,m$
bis auf die numerische Berechnung
der Pyramidenoberfläche richtig
gelöst.
Fast
Gut.
Walter

Komentarz nauczyciela: *Dwa pierwsze zadania zostały rozwiązane poprawnie. Trzecie zadanie zostało rozwiązane poprawnie z wartością $r = 1,234\,m$, aż do obliczeń numerycznych powierzchni ostrosłupa* (przetłumaczone z niemieckiego)

13

Czasze

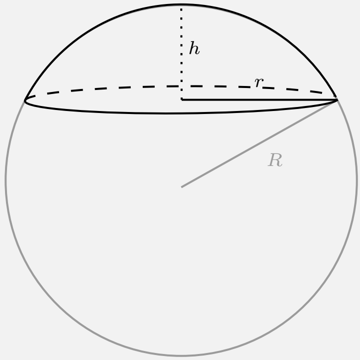
Po obu stronach okręgu o promieniu $\rho = 6$cm znajdują się 2 kuliste czasze o wysokościach $h_1 = 2$cm i $h_2 = 3$cm. Jakie jest pole powierzchni i objętość bryły w kształcie soczewki złożonej z dwóch kulistych czasz?

Źródło: [1, sygn. 261, str. 12 – 13], matura z 6.02.1914 r.

Rozwiązanie:
W zadaniu szukamy zarówno pola powierzchni P, jak i objętości V bryły powstałej z dwóch złożonych czasz. Polecenie dobrze sugeruje jej podobieństwo do soczewki (dwuwypukłej). Wystarczy znaleźć pole i objętość dla każdej z czasz z osobna, a szukana będzie ich sumą, tzn. $P = P_1 + P_2$ oraz $V = V_1 + V_2$. Z polecenia wiemy, że $\rho = 6$cm, $h_1 = 2$cm, $h_2 = 3$cm.

Czasza i odcinek kuli:

Czaszą nazwiemy część wspólną sfery i półprzestrzeni domkniętej, wyznaczonej przez płaszczyznę tej sfery, tzn. to część sfery ograniczonej przez pewien okrąg leżący na tej sferze.



Przyjęte oznaczenia to: $R-$promień kuli, $r-$promień czaszy, $h-$ strzałka czaszy (potocznie zwana wysokością). Pole powierzchni czaszy wynosi:

$$P = 2\pi Rh.$$

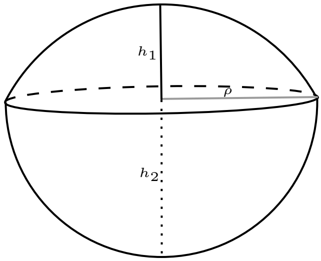
Zależność pomiędzy strzałką a promieniem wskazuje wzór:

$$r = \sqrt{(2R-h)h}.$$

Bryłę ograniczoną przez czaszę i jej podstawę nazwiemy **odcinkiem kuli**, zatem to część wspólna kuli i półprzestrzeni domkniętej wyznaczonej przez płaszczyznę przecinającą tę kulę. Jej brzegiem jest suma koła i czaszy. Objętość odcinka kuli wynosi:

$$V = \frac{\pi}{3}h^2(3R-h).$$

Przedstawmy rysunek bryły i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia. Niech P_1 oznacza powierzchnię górnej czaszy, P_2 dolnej. Poprzez V_1 będziemy rozumieć objętość górnego odcinka kuli, V_2 – dolnego.



Zauważmy, że aby rozwiązać zadanie, potrzebujemy wyznaczyć promienie kul, co uzyskujemy, przekształcając wzór na zależność pomiędzy strzałką a promieniem:

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}.$$

Obliczamy poszczególne promienie, zaczynając od promienia kuli dla górnej czaszy:

$$R_1 = \frac{\rho^2 + h_1^2}{2h_1} = \frac{36 + 4}{4} = 10\,[\mathrm{cm}]\,.$$

Dla dolnej mamy:

$$R_2 = \frac{\rho^2 + h_2^2}{2h_2} = \frac{36 + 9}{6} = \frac{15}{2}\,[\mathrm{cm}]\,.$$

Przechodzimy do obliczenia pola bryły:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 = 2\pi R_1 h_1 + 2\pi R_2 h_2 = 2\pi(R_1 h_1 + R_2 h_2) \\ &= 2\pi\left(10 \cdot 2 + \frac{15}{2} \cdot 3\right) = 85\pi\left[\mathrm{cm}^2\right]. \end{aligned}$$

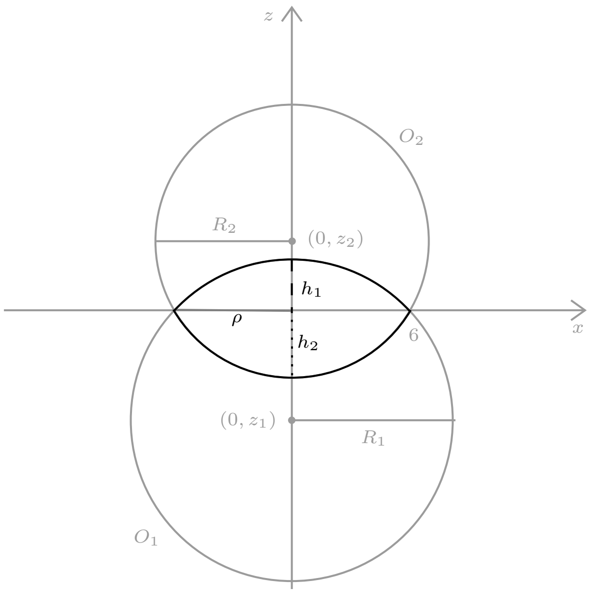
Pozostało obliczyć objętość:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3}h_1^2(3R_1 - h_1) + \frac{\pi}{3}h_2^2(3R_2 - h_2) \\ &= \frac{\pi}{3}\left[h_1^2(3R_1 - h_1) + h_2^2(3R_2 - h_2)\right] \\ &= \frac{\pi}{3}\left[4(30 - 2) + 9\left(\frac{45}{2} - 3\right)\right] = \frac{575\pi}{6} \end{aligned}$$

$$= \quad 95\frac{5}{6}\pi\left[\mathrm{cm}^3\right].$$

Ostatecznie pole powierzchni bryły wynosi: $P = 85\pi$ cm^2, a objętość $V = 95\frac{5}{6}\pi$ cm^3.

Zadania tego typu, niezależnie od zadanej bryły, można rozwiązywać stosując metodę obliczania objętości i pola powierzchni bryły przy użyciu całki podwójnej. Zaprezentujemy takie rozwiązanie dla powyższych danych. Załóżmy, że okrąg wspomniany w zadaniu leży na płaszczyźnie OXY, a jego środek w punkcie $(0, 0, 0)$. Szkicujemy rysunek poglądowy, na który nanosimy dane z zadania. Do naszych celów wystarczy rysunek w dwóch wymiarach - rzut na płaszczyznę wyznaczoną przez osie x oraz z.



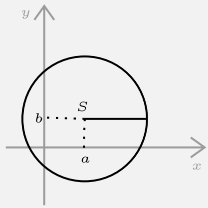
Zaczynamy od wyznaczenia środka i promienia okręgu O_1.

Równanie okręgu:

Okrąg o środku w punkcie (a, b) i promieniu $R > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny (x, y) spełniających równanie:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Powyższe równanie jest postacią kanoniczną.



Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (0, z_1)$ i promieniu R_1 możemy zapisać w postaci:

$$x^2 + (z - z_1)^2 = R_1^2.$$

Podstawiamy do niego współrzędne dwóch punktów, które należą do okręgu – $(0, 2)$ oraz $(6, 0)$ – i tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} 0^2 + (2 - z_1)^2 & = & R_1^2 \\ 6^2 + (0 - z_1)^2 & = & R_1^2. \end{cases}$$

Po podniesieniu do kwadratu otrzymujemy:

$$\begin{cases} 4 - 4z_1 + z_1^2 & = & R_1^2 \\ 36 + z_1^2 & = & R_1^2. \end{cases}$$

Przyrównujemy do siebie obie strony równania:

$$36 + z_1^2 = 4 - 4z_1 + z_1^2.$$

Stąd wyliczamy $z_1 = -8$. Otrzymany wynik podstawiamy do pierwszego równania, skąd wyznaczamy $R_1 = 10$. Ostatecznie równanie okręgu O_1 ma postać:

$$x^2 + (z + 8)^2 = 100,$$

natomiast równanie kuli K_1, której rzutem jest ów okrąg:

$$x^2 + y^2 + (z + 8)^2 = 100.$$

Interesuje nas część kuli dla $z \geqslant 0$. Wyznaczamy z z równania kuli, pamiętając o tym założeniu:

$$z = \sqrt{100 - x^2 - y^2} - 8.$$

Zapisujemy ostatecznie równanie górnej części czaszy:

$$\begin{cases} z = \sqrt{100 - x^2 - y^2} - 8 \\ \qquad\qquad x^2 + y^2 \leqslant 6^2. \end{cases}$$

Równanie dolnej części czaszy wyznaczamy analogicznie z uwzględnieniem, że tym razem mamy $z \leqslant 0$, otrzymując:

$$\begin{cases} z = -\sqrt{(\frac{15}{2})^2 - x^2 - y^2} + \frac{9}{2} \\ \qquad\qquad x^2 + y^2 \leqslant 6^2. \end{cases}$$

Przechodzimy teraz do właściwej części rozwiązania, w której pokrótce postaramy się przybliżyć temat całki pod kątem zastosowania do wyznaczenia pola powierzchni i objętości bryły. Zaczniemy od policzenia objętości czaszy.

Objętość bryły ograniczonej obszarem:

Jeżeli bryła ograniczona jest obszarem D:

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \end{cases}$$

oraz funkcjami dwóch zmiennych f_1 i f_2, odpowiednio z dołu i z góry, to wzór na jej objętość jest następujący:

$$V = \iint_D \left(f_1(x, y) - f_2(x, y)\right) dx\, dy$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(f_1(x, y) - f_2(x, y)\right) dx\, dy.$$

Ponieważ w naszym przypadku obszarem, po którym całkujemy, jest okrąg, przydatne okaże się przejście na współrzędne biegunowe, którego dokonujemy przez podstawienie

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\phi \\ y = r \cdot \sin\phi \end{cases}$$

oraz zastosowanie następującego faktu:

Objętość bryły ograniczonej obszarem dla współrzędnych biegunowych:

Jeśli D jest obszarem całkowania danym odpowiednio jako:

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \end{cases}$$

oraz równoważnie:

$$\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant R \\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

gdzie $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, f_1 i f_2 jak wyżej, wzór na objętość bryły przedstawia się następująco:

$$V = \iint_D \left(f_1(r\cos\phi, r\sin\phi) - f_2(r\cos\phi, r\sin\phi)\right) r\, dr\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(f_1(r\cos\phi, r\sin\phi) - f_2(r\cos\phi, r\sin\phi)\right) r\, dr\, d\phi.$$

Uzyskujemy wówczas stałe granice całkowania, co znacznie ułatwi obliczenia. W naszym przypadku funkcją ograniczającą z góry jest: $f_1(x,y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2} - 8$, a ograniczającą z dołu: $f_2(x,y) = -\sqrt{(\frac{15}{2})^2 - x^2 - y^2} + \frac{9}{2}$, natomiast obszarem całkowania wspomniany okrąg: $x^2 + y^2 \leqslant 6^2$. Dokonujemy przejścia na współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x &= r\cos\phi \quad \phi \in [0, 2\pi) \\ y &= r\sin\phi \quad r \in [0, 6]. \end{cases}$$

Uzyskujemy wówczas: $f_1(r\cos\phi, r\sin\phi) = \sqrt{100 - r^2} - 8$ oraz $f_2(r\cos\phi, r\sin\phi) = -\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - r^2} + \frac{9}{2}$. Podstawiając wyliczone funkcje do wzoru na objętość, mamy:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^6 \left(\sqrt{100 - r^2} - 8 + \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - r^2} - \frac{9}{2}\right) r\,dr\,d\phi.$$

Liniowość całki:

Dla dowolnych stałych a, b oraz funkcji całkowalnych f i g prawdziwy jest wzór:

$$\int (af + bg) = a\int f + b\int g.$$

Zajmijmy się najpierw obliczeniem całki wewnętrznej, którą oznaczymy jako I. Korzystamy tu z liniowości całki, dodając uprzednio -8 do $-\frac{9}{2}$:

$$I = \int_0^6 \sqrt{100 - r^2}\, r\,dr + \int_0^6 \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - r^2}\, r\,dr - \int_0^6 \frac{25}{2} r\,dr.$$

Obliczymy każdą z tych całek z osobna, w dwóch pierwszych stosując metodę całkowania przez podstawienie (patrz ramka poniżej) oraz podstawowe wzory na pochodne (patrz str. 1).

Metoda całkowania przez podstawienie:

Dla funkcji ciągłej f i funkcji g, mającej ciągłą pochodną, zachodzi następujący wzór:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt,$$

gdzie $t = g(x)$, $dt = g'(x)dx$, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$.

$$I_1 = \int_0^6 \sqrt{100 - r^2}\, r\, dr = \begin{vmatrix} 100 - r^2 = t \\ -2r\, dr = dt \\ r\, dr = \frac{-dt}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \int_{100}^{64} \sqrt{t}\, dt$$

Odwrócenie kolejności granic całkowania:

Dla dowolnej funkcji całkowalnej na przedziale $[a, b]$ prawdziwy jest wzór:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{64}^{100} \sqrt{t}\, dt$$

Podstawowe wzory na całki:

- $\int a = ax + C$ dla $a \in \mathbb{R}$,
- $\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ dla $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

gdzie C jest dowolną stałą. W przypadku całek oznaczonych, czyli takich z granicami całkowania, nie dopisujemy stałej C, a korzystamy z poniższego wzoru.

Wzór Newtona-Leibniza:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f ciągłej na przedziale $[a, b]$, tzn. $F'(x) = f(x)$.

Stosując wzór na całkę z x^n przy $n = \frac{1}{2}$ oraz wzór Newtona-Leibniza, obliczamy:

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_{64}^{100} = \frac{1000}{3} - \frac{64\cdot 8}{3} = \frac{488}{3}.$$

Całkę $I_2 = \int_0^6 \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - r^2}\, r\, dr$ liczymy przy użyciu analogicznych podstawień i metod, otrzymując: $I_2 = \frac{441}{4}$. Całka $I_3 = \int_0^6 \frac{25}{2} r\, dr$ jest elementarna, więc obliczamy ją, korzystając ze wzoru na całkę z x^n przy $n = 1$ oraz liniowości całki, uzyskując w wyniku: $I_3 = -225$. Możemy teraz wrócić do całki I i podstawić otrzymane wyniki:

$$I = \frac{488}{3} + \frac{441}{4} - 225 = \frac{575}{12}.$$

Powracamy do wyjściowego wzoru na objętość, podstawiamy wynik całki I i prowadzimy obliczenia do końca:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{575}{12}\, d\phi = \frac{575}{12}\,[\phi]_0^{2\pi} = \frac{575}{12}\cdot 2\pi = \frac{575}{6}\pi = 95\frac{5}{6}\pi\;\left[\mathrm{cm}^3\right].$$

Przechodzimy do obliczenia pola powierzchni bryły.

Pochodna funkcji złożonej:

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie $g(x)$, a funkcja g - w punkcie x, to:

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych:

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ obliczamy tak jak „zwykłe" pochodne, w pierwszym przypadku traktując y, a w drugim x jako stałą.

Pole płata powierzchniowego funkcji dwóch zmiennych ograniczonej obszarem:

Wzór na pole płata powierzchniowego funkcji dwóch zmiennych f ograniczonej obszarem D:

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \end{cases}$$

jest następujący:

$$\begin{aligned} P &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy, \end{aligned}$$

gdzie $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ są pochodnymi cząstkowymi funkcji f.

Zauważmy, że we wzorze występuje tylko jedna funkcja, a nie jak w przypadku objętości – ograniczająca z góry i z dołu. Wobec tego konieczne jest podzielenie naszego rozwiązania na dwa etapy – najpierw obliczymy pole dla $z \geqslant 0$, następnie dla $z \leqslant 0$. W tym wypadku uwzględnimy zmianę znaku funkcji ograniczającej, ponieważ pole powierzchni jest dodatnie. Na końcu dodamy do siebie oba wyniki, uzyskując szukaną objętość bryły. Oznaczmy pole górnej powierzchni jako P_1. Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2} - 8$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{100 - x^2 - y^2} - 8\right) = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2 - y^2}}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{100 - x^2 - y^2} - 8\right) = \frac{-y}{\sqrt{100 - x^2 - y^2}}.$$

Podstawiamy dane do wzoru na pole płata powierzchniowego funkcji f, ograniczonej okręgiem $x^2 + y^2 \leqslant 6$ i analogicznie jak przy liczeniu objętości, przechodzimy na współrzędne biegunowe:

$$\begin{aligned} P_1 &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 6} \sqrt{1 + \frac{x^2}{100 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{100 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^6 \sqrt{1 + \frac{r^2}{100 - r^2}}\, r\, dr\, d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^6 \frac{10}{\sqrt{100 - r^2}} r\, dr\, d\phi. \end{aligned}$$

Rozpoczynamy od obliczenia całki wewnętrznej metodą przez podstawienie, wykorzystując zależności wprowadzone w części dotyczącej objętości:

$$\begin{aligned} \int_0^6 \frac{10}{\sqrt{100 - r^2}} r\, dr &= \left|\begin{array}{c} 100 - r^2 = t \\ -2r\, dr = dt \\ r\, dr = \frac{-dt}{2} \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int_{100}^{64} \frac{10\, dt}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2}\int_{64}^{100} \frac{10\, dt}{\sqrt{t}} = 10\left[\sqrt{t}\right]_{64}^{100} \\ &= 100 - 80 = 20. \end{aligned}$$

Podstawiamy otrzymany wynik całki wewnętrznej do wyznaczonego wzoru na P_1 i za pomocą poznanych wzorów i prostych obliczeń dochodzimy do wyniku:

$$P_1 = \int_0^{2\pi} 20\, d\phi = 20 \cdot 2\pi = 40\pi.$$

Pole dolnej powierzchni P_2 wyliczamy analogicznie, pamiętając o zmianie znaku funkcji $g(x,y) = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - x^2 - y^2} - \frac{9}{2}$. W rezultacie otrzymujemy $P_2 = 45\pi$. Szukane pole powierzchni bryły wyznaczamy przez zsumowanie obu wyników:

$$P = P_1 + P_2 = 40\pi + 45\pi = 85\pi \left[cm^2\right].$$

Zauważmy, że wyliczone za pomocą całki podwójnej objętość i pole powierzchni bryły pokrywają się z tymi uzyskanymi wcześniej.

Autorki rozwiązania: *Adrianna Smolińska i Klaudia Piwowarczyk*
Opieka merytoryczna: *dr Katarzyna Taczała*

Sylwetka abiturienta: Paweł Kazimierz Cyms, urodzony 2 marca 1894 w Pawłowie (pow. witkowski). Po maturze wstąpił do Arcybiskupiego Seminarium Duchownego w Poznaniu. W 1916 r. wcielony do armii niemieckiej. Ukończył szkołę oficerską. Na początku 1919 r. dowodził kompanią gnieźnieńsko-wrzesińską wyzwalającą Trzemeszno, Mogilno, Strzelno, Kruszwicę i Inowrocław. Brał udział w wojnie polsko-bolszewickiej i w III Powstaniu Śląskim. W czasie II wojny działał w ZWZ-AK. Zmarł 13 listopada 1949 r.

14

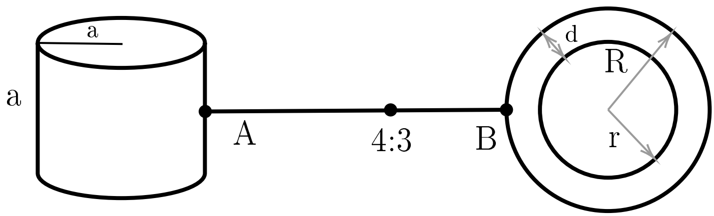
Kula i walec

Na końcach A i B sztywnej, nieważkiej linii prostej zawieszono walec o promieniu i wysokości a oraz wydrążoną kulę ze ścianą o grubości $d = \frac{1}{m} \cdot a$, obydwa wykonane z tego samego materiału. Jak duży musi być promień zewnętrznej sfery, jeśli punkt, w którym AB ma uzyskać równowagę, ma znajdować się na linii AB w 4 : 3 jej długości?
Przyjmij $m = \sqrt[3]{30}$.

Źródło: [1, sygn. 132, str. 40 – 41], matura z 9.02.1892 r.

Rozwiązanie:

Rysunek pomocniczy:



Niech V_k oznacza objętość wydrążonej kuli, zaś V_w – objętość walca. Mamy:

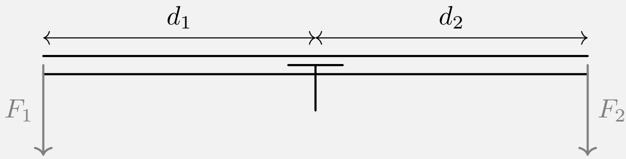
$$V_w = a^3\pi$$
$$V_k = \frac{4}{3}\pi(R^3 - (R-d)^3).$$

Równanie dźwigni:

Równanie dźwigni opisuje równowagę momentów sił działających na dźwignię. Dla dźwigni dwustronnej możemy zapisać je w postaci:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2,$$

gdzie F_1 i F_2 to siły działające na dźwignię, a d_1 i d_2 to ich odpowiednie odległości od punktu podparcia. Warunek ten gwarantuje równowagę dźwigni. W przypadku, gdy siły te pochodzą od mas zawieszonych na dźwigni, wielkości F_1 oraz F_2 można zastąpić masami tych obiektów.



W tym wypadku siły F_1 i F_2 oznaczają siłę grawitacji z jaką ziemia przyciąga odpowiednio walec oraz kulę. Wyraża się je następującymi wzorami $F_1 = m_w \cdot g$ i $F_2 = m_k \cdot g$, gdzie $m_w = V_w \cdot s$ i $m_k = V_k \cdot s$ (s oznacza gęstość materiału, z którego wykonane są kula i walec – patrz str. 176), oznaczają masy walca i kuli. Oba obiekty są wykonane z tego samego materiału oraz przyspieszenie ziemskie oddziałuje na nie tak samo, co oznacza, że ich masy, a co za tym idzie siła grawitacji, są wprost proporcjonalne do objętości. Jeżeli chcemy, by punkt równowagi znajdował się w 4:3 długości linii, to z powyższego równania dźwigni otrzymujemy następującą równość:

$$4a^3\pi = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi(R^3 - (R-d)^3),$$

którą można przekształcić w następujący sposób:

$$a^3 = R^3 - (R-d)^3$$

$$
\begin{aligned}
a^3 &= R^3 - R^3 + 3R^2d - 3Rd^2 + d^3 \\
a^3 &= 3R^2d - 3Rd^2 + d^3 \\
3R^2d - 3Rd^2 + d^3 - a^3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Teraz, podstawiając $d = \frac{1}{m} \cdot a$, otrzymamy równanie kwadratowe o następującej postaci:

$$3R^2 \frac{a}{m} - 3R\frac{a^2}{m^2} + \frac{a^3 - a^3m^3}{m^3} = 0.$$

Wyróżnik tego równania względem R ma następującą postać:

$$\Delta = \frac{9a^4}{m^4} - 4 \cdot \frac{a^3 - a^3m^3}{m^3} \cdot \frac{3a}{m}.$$

Celem uproszczenia zapisu, na tym etapie podstawimy $m = \sqrt[3]{30}$ tylko w liczniku, otrzymując:

$$\Delta = \frac{357a^4}{m^4} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{357}a^2}{m^2}$$

Powyższe równanie ma zatem dwa rozwiązania:

$$R = \frac{3a^2 + \sqrt{357}a^2}{m^2} \cdot \frac{m}{6a} = \frac{a(3 + \sqrt{357})}{6\sqrt[3]{30}}$$

oraz

$$R = \frac{3a^2 - \sqrt{357}a^2}{m^2} \cdot \frac{m}{6a} = \frac{a(3 - \sqrt{357})}{6\sqrt[3]{30}}.$$

Promień sfery nie może być ujemny, więc z tych rozwiązań wybieramy pierwsze:

$$R = \frac{a(3 + \sqrt{357})}{6\sqrt[3]{30}} \approx 1{,}174a.$$

Autor rozwiązania: *Adam Nawrocki*
Opieka merytoryczna: *dr Paweł Płaczek*

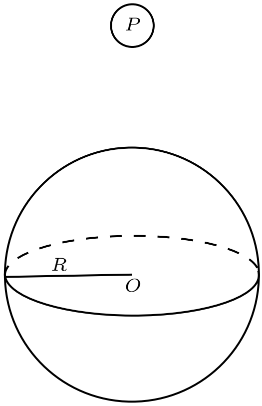
15

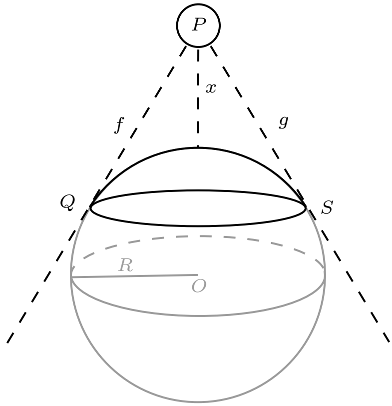
Świecący Punkt

Jak daleko musi znajdować się świecący punkt od kuli, aby oświetlona część stanowiła $\frac{1}{4}$ jej powierzchni?

Źródło: [1, sygn. 183, str. 1, 21–22], matura z 1899 r., termin wielkanocny

Rozwiązanie:
Wpierw wyobraźmy sobie tę sytuację. Mamy daną kulę oraz oddalony od niej świetlisty punkt. Na poniższym rysunku O jest środkiem kuli, R jest jej promieniem, natomiast P reprezentuje źródło światła. Następnie zaznaczmy poprzez x odległość punktu od powierzchni kuli - szukaną zadania. Zauważmy, że oświetloną powierzchnię ograniczają styczne do kuli - f i g, poprowadzone od świecącego punktu. Punkty styku oznaczmy przez Q oraz S. Zwróćmy też uwagę, że szukana przez nas powierzchnia, to nic innego, jak odcinek kuli bez podstawy. Odległość $|QS|$ między punktami styku jest największa - równa średnicy (wyciętej) podstawy, o której mowa powyżej.

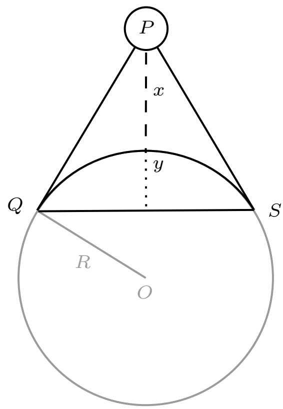




Odcinek kuli jest bryłą ograniczoną przez czaszę i jej podstawę. Przypomnijmy, że wzory związane z czaszami omówiliśmy w rozdziale 13 (patrz str. 119). Interesuje nas jedynie oświetlona powierzchnia, czyli czasza. Skorzystamy ze wzoru na pole boczne odcinka kuli, tzn. pole czaszy:

$$P_{czaszy} = 2\pi Rh.$$

Aby rysunek stał się czytelniejszy dla obliczeń, narysujemy go w przekroju. Oznaczenia pozostają te same. Dodatkowo połączymy ze sobą punkty styku - Q oraz S, przez y zaznaczymy brakującą odległość od punktu przecięcia najkrótszej prostej przechodzącej przez P i kulę (czyli prostej „realizującej” odległość x) do tego łączenia. Widzimy, że dopisana odległość y, to nic innego jak wysokość h czaszy. Podstawmy do wzorów to, co dotychczas wiemy. Chcemy, aby oświetlona część stanowiła $\frac{1}{4}$ powierzchni kuli, więc:



$$P_{czaszy} = \frac{1}{4} P_{kuli}.$$

Zestawiając wspomniany wcześniej wzór na pole czaszy ze zmienionym oznaczeniem wysokości oraz wzór na pole kuli (patrz str. 36) $P_{kuli} = 4\pi R^2$, otrzymujemy:

$$2\pi R y = \frac{1}{4} 4\pi R^2,$$

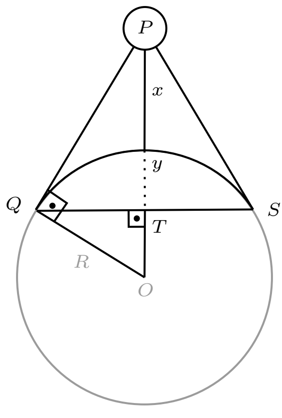
a po uproszczeniu:

$$y = \frac{1}{2} R.$$

Znaleźliśmy kluczową niewiadomą do rozwiązania zadania. Teraz skupimy się, by wyznaczyć szukaną – x. Raz jeszcze, uzupełnijmy rysunek. Ze względu na fakt, że f jest styczną, ΔPQO jest trójkątem prostokątnym. Długość $|QT|$ jest wysokością trójkąta ΔPQO, zatem powstałe trójkąty ΔQOT oraz ΔPQT również są prostokątne. Możemy więc zastosować twierdzenie Pitagorasa (patrz str. 35).

Wpierw dla trójkąta ΔQOT:

$$R^2 = |OT|^2 + |QT|^2.$$



Uwzględniając $y = \frac{1}{2}R$ dla $|OT| = R - y$, otrzymujemy:

$$|QT|^2 = R^2 - \frac{1}{4}R^2 = \frac{3}{4}R^2.$$

Teraz z trójkątów ΔPQO i ΔPQT dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} |QP|^2 = |QT|^2 + |PT|^2 \\ |QP|^2 + R^2 = |OP|^2. \end{cases}$$

Wprowadzając znane dane i przekształcając, mamy:

$$\begin{cases} |QP|^2 = \frac{3}{4}R^2 + \left(x + \frac{1}{2}R\right)^2 \\ |QP|^2 = (x+R)^2 - R^2. \end{cases}$$

Stąd:

$$\frac{3}{4}R^2 + \left(x + \frac{1}{2}R\right)^2 = (x+R)^2 - R^2.$$

Po rozwinięciu, np. ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy, tj. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mamy:

$$\frac{3}{4}R^2 + x^2 + xR + \frac{1}{4}R^2 = x^2 + 2xR + R^2 - R^2,$$

co po uporządkowaniu daje:

$$R^2 = xR.$$

Możemy obustronnie podzielić przez R, ponieważ jest to długość promienia zadanej kuli – czyli wielkość dodatnia:

$$x = R.$$

Zatem, aby świecący punkt oświetlał $\frac{1}{4}$ powierzchni kuli, musi być od niej oddalony o odległość jej promienia – R.

Zadanie można też rozwiązać, korzystając z podobieństwa trójkątów – tak właśnie podszedł do tego problemu abiturient piszący tę maturę.

Podobieństwo trójkątów:

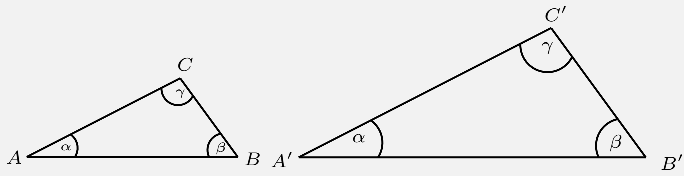
Mówimy, że trójkąty $\triangle ABC$ oraz $\triangle A'B'C'$ są podobne, jeżeli ich boki są parami proporcjonalne, tzn.:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}.$$

Zapisujemy to w następujący sposób:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Przykładowo, trójkąty na poniższym rysunku są podobne.



Trójkąty podobne mają kąty o tej samej mierze. Jeżeli zachodzi dowolny z poniższych warunków, to trójkąty są podobne:

- cecha KKK (Kąt-Kąt-Kąt) – miary odpowiednich kątów są równe,
- cecha BBB (Bok-Bok-Bok) – stosunki odpowiednich długości boków są równe,
- cecha BKB (Bok-Kąt-Bok) – stosunki długości dwóch par boków są równe i mają równe miary kątów pomiędzy tymi bokami.

Po ponownym wyliczeniu, że $y = \frac{1}{2}R$ i stworzeniu odpowiednich rysunków, zauważamy, że ΔPQO oraz ΔQTO są podobne z cechy KKK (są to trójkąty prostokątne, o wspólnym kącie $\measuredangle QOP = \measuredangle QOT$). Wobec tego możemy zapisać stosunek:

$$\frac{|OQ|}{|OT|} = \frac{|OP|}{|OQ|}.$$

Uwzględniając przyjęte oznaczenia, otrzymujemy:

$$R^2 = (x+R) \cdot \frac{R}{2},$$

skąd wyliczamy $x = R$.

Autorka rozwiązania: *Adrianna Smolińska*
Opieka merytoryczna: *dr Piotr Mizerka*

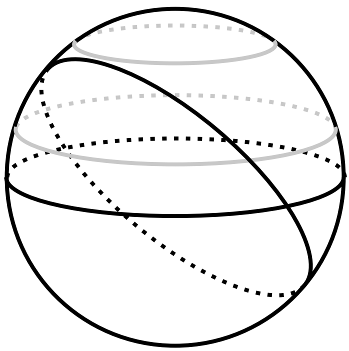
Część V

Geometria sferyczna

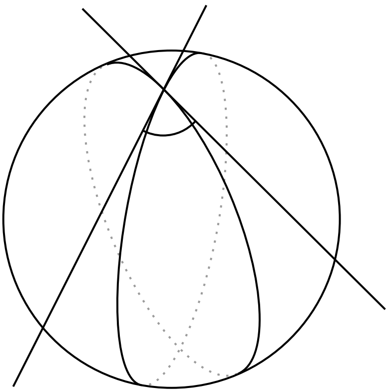
Geometria sferyczna

W tej części pojawią się zadania związane z geometrią na powierzchni kuli. Ponieważ obecny program szkół nie omawia tych zagadnień, to poniżej przedstawimy pojęcia niezbędne do zrozumienia i rozwiązania zadań z nią związanych.

Okręgiem wielkim nazywamy taki okrąg na sferze, którego środek pokrywa się ze środkiem sfery. Na poniższym rysunku okręgi wielkie zostały narysowane kolorem czarnym, natomiast okręgi szare nie są okręgami wielkimi.

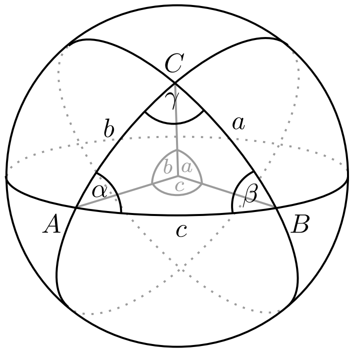


Łatwo zauważyć, że dowolne dwa różne okręgi wielkie przecinają się w dokładnie dwóch punktach. Kąt pomiędzy stycznymi do tych okręgów w punkcie przecięcia nazywamy **kątem między okręgami wielkimi**.



Przez dwa dowolne punkty sfery, które nie są końcami jednej średnicy, przechodzi dokładnie jeden okrąg wielki. Przez punkty, które są końcami jednej średnicy (np. biegun północny i biegun południowy na kuli ziemskiej) przechodzi nieskończenie wiele okręgów wielkich. **Odległością sferyczną** między punktami na sferze nazywamy miarę kąta środkowego, na którym oparty jest łuk okręgu wielkiego przechodzącego przez te punkty.

Niech dane będą punkty A, B, C nieleżące na jednym okręgu wielkim. **Trójkątem sferycznym** o wierzchołkach A, B, C nazywamy fragment sfery ograniczony przez trzy łuki okręgów wielkich wyznaczonych przez pary punktów A i B, B i C oraz A i C odpowiednio. Przez długość boku w takim trójkącie rozumiemy odległość sferyczną między wierzchołkami. Trójkąt nazywamy **eulerowskim**, jeśli wszystkie boki mają długość mniejszą niż $180°$.



W zadaniach z tej części będziemy korzystać z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 15.1 (I twierdzenie cosinusów dla trójkątów sferycznych)**.** *Niech α, β, γ będą kątami w trójkącie sferycznym. Niech a, b, c będą długościami boków naprzeciwko kątów α, β, γ odpowiednio. Wówczas zachodzą następujące wzory:*

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$
$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$
$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta.$$

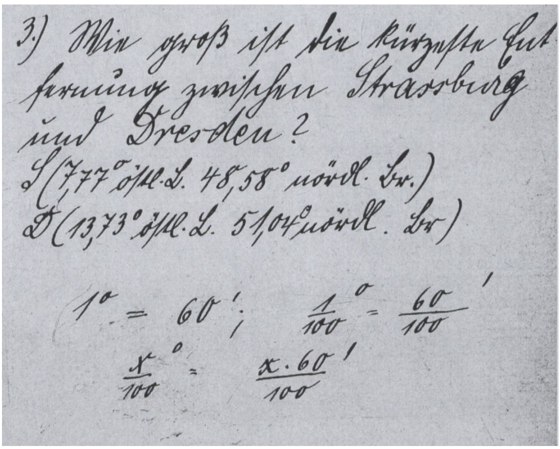
Autorka tekstu: Zofia Gołaska

16

Ze Strassburga do Drezna

Jaka jest najkrótsza odległość (na kuli) między Strassburgiem $(48,58° N;\ 7,77° E)$ a Dreznem $(51,04° N; 13,73° E)$?

Źródło: [1, sygn. 237, str. 6 – 7], matura z 7.09.1909 r.



3.) Wie groß ist die kürzeste Entfernung zwischen Strassburg und Dresden?
S(7,77° östl. L. 48,58° nördl. Br.)
D(13,73° östl. L. 51,04° nördl. Br)

$1° = 60'$; $\frac{1}{100}° = \frac{60}{100}'$

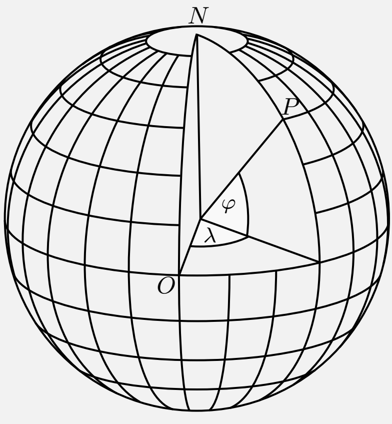
$\frac{x}{100}° = \frac{x \cdot 60}{100}'$

Treść zadania zapisana (w języku niemieckim) przez Leona Cymsa, 7.09.1909 r.

Rozwiązanie:

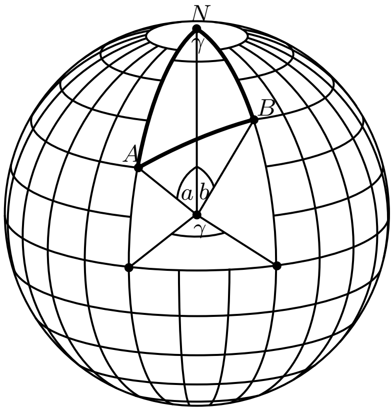
Współrzędne geograficzne:

Położenie punktu na Ziemi określamy za pomocą współrzędnych geograficznych. **Długością geograficzną** nazywamy kąt między półpłaszczyzną południka zerowego a półpłaszczyzną południka na którym znajduje się dany punkt. Na rysunku jest ona oznaczona symbolem λ. Długość geograficzna przyjmuje wartości od $0°$ do $180°$. **Szerokością geograficzną** (kąt φ na rysunku) nazywamy kąt pomiędzy płaszczyzną równika a prostą przechodzącą przez dany punkt i środek Ziemi. Przyjmuje ona wartości od $0°$ do $90°$. Podając współrzędne geograficzne w pierwszej kolejności podajemy szerokość, następnie długość geograficzną. Dodatkowo podajemy czy punkt znajduje się na półkuli północnej czy południowej dopisując do szerokości geograficznej literę N lub S odpowiednio. Podobnie do długości geograficznej dopisujemy literę E lub W w zależności od tego czy punkt znajduje się na półkuli wschodniej czy zachodniej.



Czasami zamiast zaznaczania symbolami na której półkuli znajduje się dany punkt, przyjmujemy, że punkty na półkuli południowej mają ujemną szerokość geograficzną, a punkty na półkuli zachodniej - ujemną długość geograficzną.

Rozważmy trójkąt sferyczny utworzony przez biegun północny N, Strassburg A i Drezno B.



Kąt γ między płaszczyznami wyznaczonymi przez łuk NA (czyli fragment południka, na którym leży Strassburg) oraz łuk NB (czyli fragment południka, na którym leży Drezno) jest równy różnicy długości geograficznych obu tych miast

$$\gamma = 13,73^\circ - 7,77^\circ = 5,96^\circ.$$

Niech a oraz b będą długościami sferycznymi boków NA i NB odpowiednio. Zauważmy teraz, że suma kąta a i szerokości geograficznej Strassburga jest równa 90°. Stąd:

$$a = 90^\circ - 48,58^\circ = 41,42^\circ.$$

Podobnie

$$b = 90^\circ - 51,04^\circ = 38,96^\circ.$$

Obliczymy kąt c, czyli kąt, na którym oparty jest łuk AB. Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów sferycznych mamy, że:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Zatem

$$\cos c = \cos 41,42^\circ \cdot \cos 38,96^\circ + \sin 41,42^\circ \cdot \sin 38,96^\circ \cdot \cos 5,96^\circ \approx 0,99683.$$

Stąd

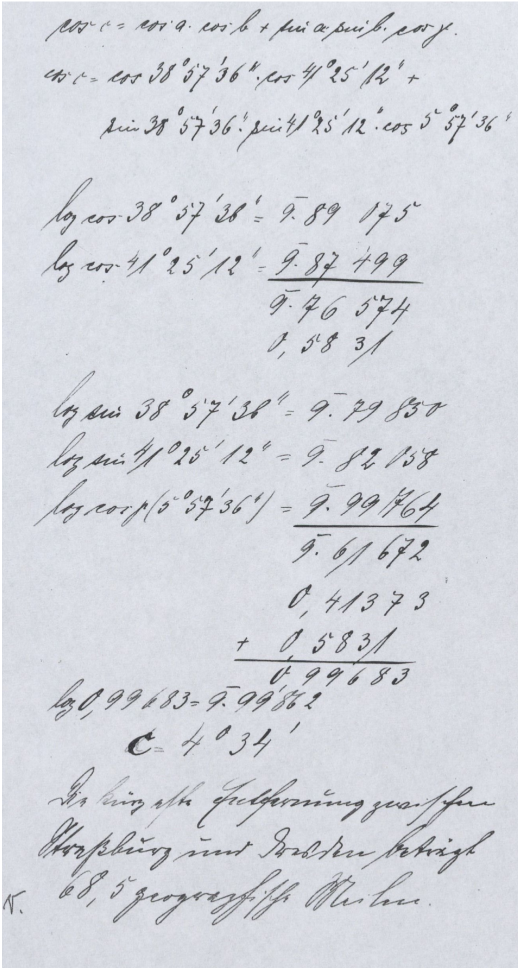
$$c \approx 4,56^\circ.$$

Szukana odległość jest równa $\frac{c}{360^\circ} 2\pi R$, gdzie R to promień Ziemi. Przyjmując teraz, że promień Ziemi R jest równy 6371km, dostajemy szukaną odległość

$$\frac{c}{360^\circ} \cdot 2\pi R \approx \frac{4,56^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6371\text{km} \approx 507\text{km}.$$

Autorka rozwiązania: *Zofia Gołaska*
Opieka merytoryczna: *dr Adam Przestacki*

Sylwetka abiturienta: Leon Cyms ur. 19.02.1885 r. w Gąsiorkach w pow. starogardzkim. Był bratem powstańców Adolfa i Pawła. Maturę zdał w 1909 r. w Gnieźnie. Po ukończeniu studiów seminaryjnych w Poznaniu i w Gnieźnie, w 1914 r. przyjął święcenia kapłańskie. Od listopada 1918 członek Polskiej Organizacji Wojskowej, w czasie Powstania Wielkopolskiego kapelan II kompanii grodziskiej. Od 1921 r. proboszcz w Gryżynie. Zmarł 23 sierpnia 1931 r.



$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$

$\cos c = \cos 38^\circ 57' 36'' \cdot \cos 41^\circ 25' 12'' +$

$\sin 38^\circ 57' 36'' \cdot \sin 41^\circ 25' 12'' \cdot \cos 5^\circ 57' 36''$

$\log \cos 38^\circ 57' 36'' = \bar{9}.89\,075$

$\log \cos 41^\circ 25' 12'' = \bar{9}.87\,499$

$\bar{9}.76\,574$

$0,5831$

$\log \sin 38^\circ 57' 36'' = \bar{9}.79\,830$

$\log \sin 41^\circ 25' 12'' = \bar{9}.82\,078$

$\log \cos \gamma (5^\circ 57' 36'') = \bar{9}.99\,764$

$\bar{9}.61\,672$

$0,41373$

$+\ 0,5831$

$0,99683$

$\log 0,99683 = \bar{9}.99862$

$c = 4^\circ 34'$

Die kürzeste Entfernung zwischen Strassburg und Dresden beträgt 68,5 geographische Meilen.

r.

Rozwiązanie abiturienta. Literka *r* w lewym dolnym rogu została napisana przez nauczyciela i oznacza *richtig* (poprawnie)

17

Statek

Statek płynie z początkowym azymutem $\alpha = 20°25'$ z miejsca C, którego współrzędne wynoszą $(65°30'N;\ 3°45'10''E)$ najkrótszą drogą do miejsca A, które znajduje się na zachód od C, i pokonuje 600 mil geograficznych. Jaka jest odległość (na kuli) miejsca A od miejsca B o współrzędnych $(20°25'10''N; 30°55'5''E)$?

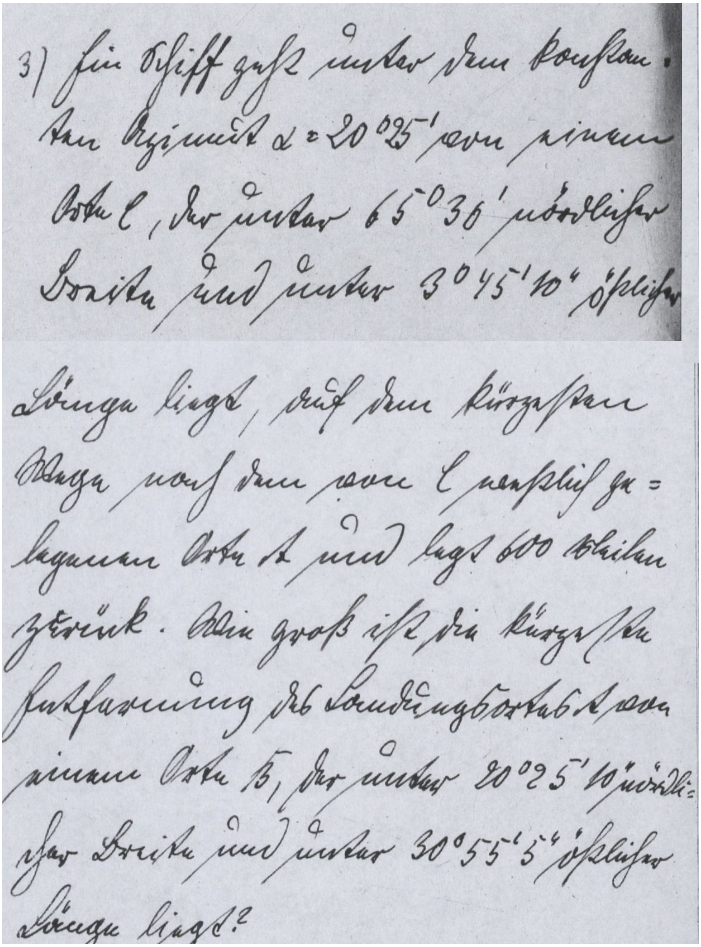
Źródło: [1, sygn. 236, str. 26–30], matura z 20.01.1909 r.

Rozwiązanie:

Mile geograficzne: Mila geograficzna to jednostka długości równa długości łuku okręgu wielkiego ma powierzchni Ziemi, opartego na kącie środkowym $\frac{1}{15}^{\circ}$. Przykładowo równik ma długość $360 \cdot 15$ mil geograficznych, a odległość między biegunem północnym, a biegunem południowym wynosi $180 \cdot 15$ mil geograficznych.

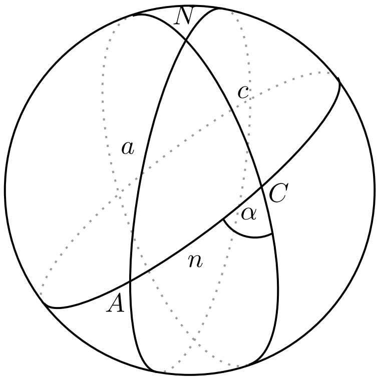
Ponieważ statek płynie najkrótszą drogą, więc porusza się on po okręgu wielkim, który przecina południk $3°45'10''E$ w punkcie C pod kątem $\alpha = 20°25'$.

Zadanie rozwiążemy korzystając trzykrotnie z twierdzenia cosinusów dla trójkątów sferycznych. Na początku obliczymy współrzędne geograficzne punktu A. Rozważmy trójkąt sferyczny utworzony przez biegun północny N, oraz punkty A i C.



3) Ein Schiff geht unter dem konstanten Azimut $\alpha = 20^\circ 25'$ von einem Orte C, der unter $65^\circ 30'$ nördlicher Breite und unter $3^\circ 45' 10''$ östlicher Länge liegt, auf dem kürzesten Wege nach dem von C westlich gelegenen Orte A und legt 600 Meilen zurück. Wie groß ist die kürzeste Entfernung des Landungsortes A von einem Orte B, der unter $20^\circ 25' 10''$ nördlicher Breite und unter $30^\circ 55' 5''$ östlicher Länge liegt?

Treść zadania zapisana przez Mariana Gładysza, 20.01.1909 r.



Wiemy, że

$$\sphericalangle ACN = 180^\circ - \alpha = 159^\circ 35'.$$

Niech c oznacza odległość sferyczną między punktem C, a biegunem północnym N. Wtedy

$$c = 90^\circ - 65^\circ 30' = 24^\circ 30'.$$

Niech n będzie odległością sferyczną punktów A i C. Wówczas z definicji mili geograficznej mamy

$$n = 600 \cdot \frac{1}{15}^\circ = 40^\circ.$$

Obliczymy kąt a, czyli odległość sferyczną między punktami N i A. Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów sferycznych (w trójkącie ACN) wiemy, że

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos c \cdot \cos n + \sin c \cdot \sin n \cdot \cos \sphericalangle ACN \\ &= \cos 24^\circ 30' \cdot \cos 40^\circ + \sin 24^\circ 30' \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 159^\circ 35' \\ &\approx 0,447256. \end{aligned}$$

Zatem

$$a \approx 63^\circ 25' 56''.$$

Szerokość geograficzna punktu A jest równa $90^\circ - a = 26^\circ 34' 4''$. Aby obliczyć długość geograficzną punktu A obliczymy kąt $\sphericalangle ANC$. Z twierdzenia cosinusów (dla trójkąta sferycznego ACN) mamy

$$\cos n = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \sphericalangle ANC.$$

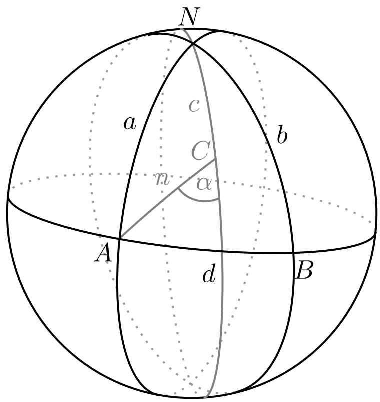
Stąd

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle ANC &= \frac{\cos n - \cos c \cdot \cos a}{\sin c \cdot \sin a} \\ &= \frac{\cos 40^\circ - \cos 24^\circ 30' \cdot \cos 63^\circ 25' 56''}{\sin 24^\circ 30' \cdot \sin 63^\circ 25' 56''} \\ &\approx 0,968063. \end{aligned}$$

Zatem

$$\sphericalangle ANC = 14^\circ 31' 9''.$$

Zauważmy, że $\sphericalangle ANC$ jest równy różnicy długości geograficznych punktów A i C (o ile przyjmujemy, że punkty na półkuli zachodniej mają ujemną długość geograficzną). Zatem długość geograficzna punktu A jest równa $3^\circ 45' 10'' - 14^\circ 31' 9'' = -10^\circ 45' 59''$. Podsumowując, punkt A ma współrzędne $(26^\circ 34' 4'' N, 10^\circ 45' 59'' W)$. Aby obliczyć odległość między punktami A i B, obliczymy najpierw odległość sferyczną tych punktów (podobnie jak w zadaniu *Ze Strassburga do Drezna*, patrz Rozdział 16).



Zauważmy, że kąt sferyczny przy wierzchołku N jest równy różnicy długości geograficznych punktów A i B (ponownie, jeśli przyjmujemy ujemne długości geograficzne dla punktów na półkuli zachodniej). Zatem

$$\sphericalangle ANB = 30^\circ 55' 5'' - (-10^\circ 45' 59'') = 41^\circ 41' 4''.$$

Zgodnie z wcześniejszymi obliczeniami

$$a = 63^\circ 25' 56''.$$

Niech b oznacza odległość sferyczną między biegunem północnym N, a punktem B. Wtedy

$$b = 90^\circ - 20^\circ 25' 10'' = 69^\circ 34' 50''.$$

Szukamy kąta d, czyli sferycznej odległości między punktami A i B. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABN dostajemy następującą równość:

$$\begin{aligned}\cos d &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \sphericalangle ANB \\ &= \cos 63^\circ 25' 56'' \cdot \cos 69^\circ 34' 50'' \\ &+ \sin 63^\circ 25' 56'' \cdot \sin 69^\circ 34' 50'' \cdot \cos 41^\circ 41' 4'' \\ &\approx 0,782029.\end{aligned}$$

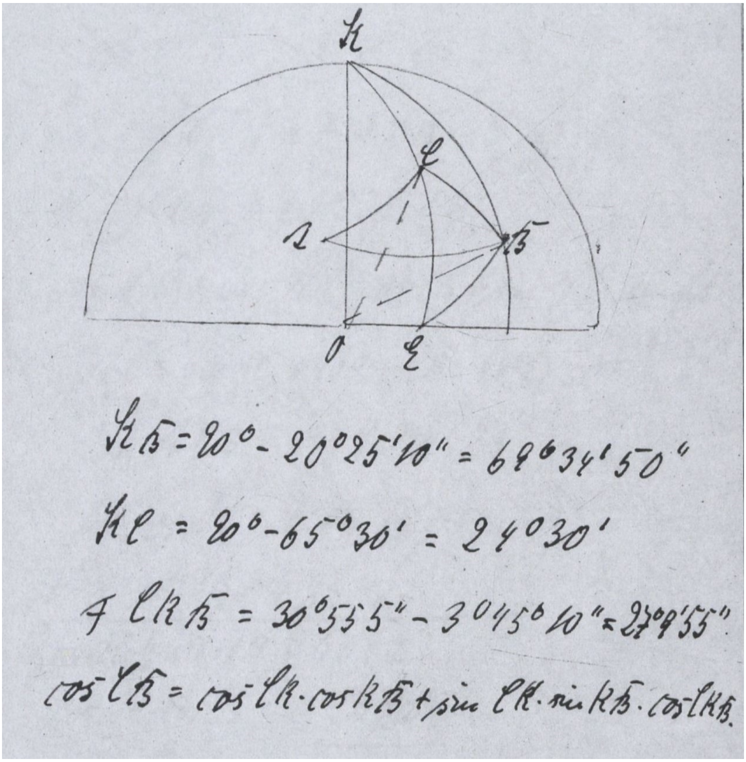
Zatem

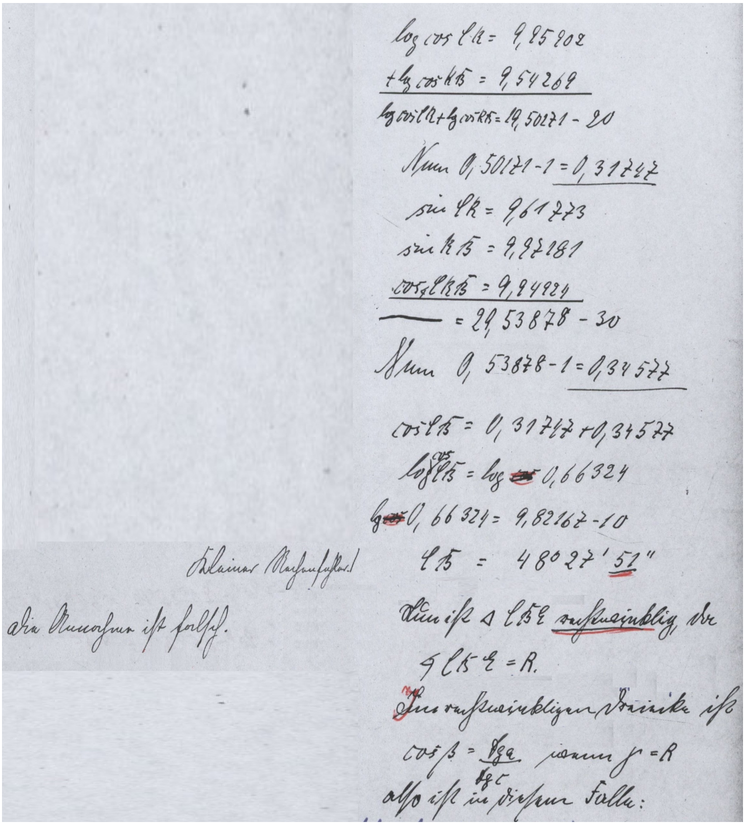
$$d \approx 38^\circ 33' 12''.$$

Stąd odległość między punktami A i B jest równa

$$\frac{d}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{38^\circ 33' 12''}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6371\text{km} \approx 4286,9\text{km}.$$

Autorka rozwiązania: *Zofia Gołaska*
Opieka merytoryczna: *dr Adam Przestacki*


k
l
s
B
O
E
kB = 90° - 20°25'10" = 69°34'50"
kl = 90° - 65°30' = 24°30'
∢ lkB = 30°55'5" - 3°45'10" = 27°9'55"
cos lB = cos lk · cos kB + sin lk · sin kB · cos lkB.



$\log\cos lk = 9{,}95902$
$+\lg\cos kB = 9{,}54269$
$\lg\cos lk + \lg\cos kB = 19{,}50171 - 20$
Num $0{,}50171 - 1 = 0{,}31747$
$\sin lk = 9{,}61773$
$\sin kB = 9{,}97181$
$\cos\sphericalangle lkB = 9{,}94924$
$= 29{,}53878 - 30$
Num $0{,}53878 - 1 = 0{,}34577$
$\cos lB = 0{,}31747 + 0{,}34577$
$\log\cos lB = \log 0{,}66324$
$\lg 0{,}66324 = 9{,}82167 - 10$
$lB = 48^\circ 27' 51''$
Dann ist Δ LBE rechtwinklig, der $\sphericalangle$ LBE = R.
Im rechtwinkligen Dreieck ist $\cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$, wenn $\gamma = R$
also ist in diesem Falle:

Kleiner Rechenfehler!
Die Annahme ist falsch.

Komentarze nauczyciela po lewej od rozwiązania: *Drobny błąd w obliczeniach. Założenie jest błędne* (przetłumaczono z języka niemieckiego)

$$\cos \mathfrak{E} l\mathfrak{B} = \frac{tg\, l\mathfrak{B}}{tg\, l\mathfrak{E}}$$

$l\mathfrak{B} = 48^\circ 27' 51''; \; l\mathfrak{E} = 65^\circ 30'$

$\log \cos \mathfrak{E} l\mathfrak{B} = \log tg\, l\mathfrak{B} - \log tg\, l\mathfrak{E}$

$\log tg\, l\mathfrak{B} = 20{,}05264 - 20$

$(-) \log tg\, l\mathfrak{E} = 10{,}34130^{(4)} - 10$

$\log \cos \mathfrak{E} l\mathfrak{B} = 9{,}71134$

$\sphericalangle \mathfrak{E} l\mathfrak{B} = 59^\circ 3' - 37''$

$\sphericalangle \mathfrak{E} l\mathfrak{B} = 59^\circ 2' 23''$

$\sphericalangle \mathfrak{A} l\mathfrak{B} = \alpha + \mathfrak{E} l\mathfrak{B}$

$\sphericalangle \mathfrak{A} l\mathfrak{B} = 79^\circ 27' 23''$

$\cos \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \cos \mathfrak{A}l \cdot \cos l\mathfrak{B} + \sin \mathfrak{A}l \cdot \sin l\mathfrak{B} \cdot \cos \mathfrak{A}l\mathfrak{B}$

$\mathfrak{A}l = 600$ Ml. $= 40^\circ; \; l\mathfrak{B} = 48^\circ 27' 51''$

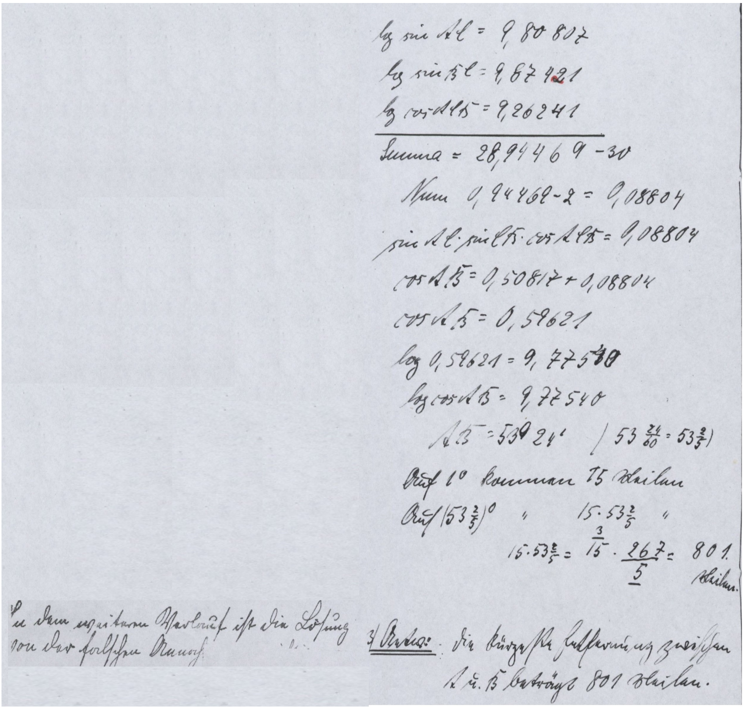
$\sphericalangle \mathfrak{A} l\mathfrak{B} = 79^\circ 27' 23''$

$\log \cos \mathfrak{A}l = 9{,}88425$

$+ \log \cos l\mathfrak{B} = 9{,}82167$

$\log \cos \mathfrak{A}l + \log \cos l\mathfrak{B} = 19{,}70592$

$\cos \mathfrak{A}l \cdot \cos l\mathfrak{B} = \underline{0{,}50807}$



lg sin AL = 9,80807

lg sin BL = 9,87421

lg cos ALB = 9,26241

Summa = 28,94469 − 30

Num 0,94469 − 2 = 0,08804

sin AL · sin BL · cos ALB = 0,08804

cos AB = 0,50817 + 0,08804

cos AB = 0,59621

log 0,59621 = 9,77540

lg cos AB = 9,77540

AB = 53° 24′ $\left(53\frac{24}{60} = 53\frac{2}{5}\right)$

Auf 1° kommen 15 Meilen

Auf $(53\frac{2}{5})°$ " $15 \cdot 53\frac{2}{5}$ "

$15 \cdot 53\frac{2}{5} = 15 \cdot \frac{267}{5} = 801$ Meilen.

In dem weiteren Verlauf ist die Lösung von der falschen Annahme [illegible]

3) Antw: Die kürzeste Entfernung zwischen A u. B beträgt 801 Meilen.

Komentarz nauczyciela po lewej od rozwiązania: *W dalszym toku rozumowanie jest poprawne, nie licząc błędnego założenia* (przetłumaczono z języka niemieckiego)

Komentarz (Zofia Gołaska):

Uczeń rozwiązał zadanie innym sposobem (patrz skany oryginalnej pracy powyżej). Najpierw obliczył odległość sferyczną punktów C i B, a potem kąt ECB, gdzie $E = (0°N, 3°45'10''E)$. Popełnił błąd, przyjmując, że trójkąt EBC jest prostokątny. Następnie obliczył odległość sferyczną punktów A i B korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC. (Kąt przy wierzchołku C jest równy $(\alpha + \sphericalangle ECB)$, a długości boków AC i CB są znane.) Rozwiązanie ucznia można poprawić obliczając kąt ECB w inny sposób.

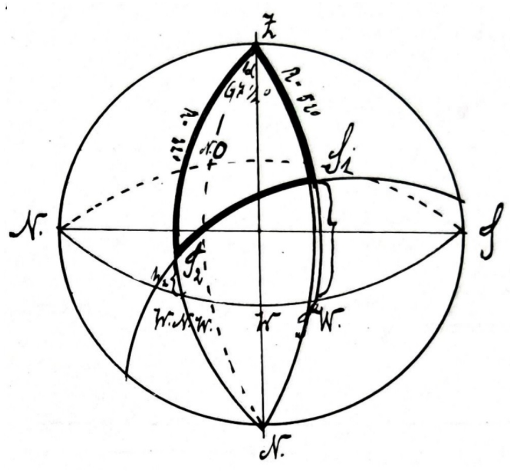
Ciekawostką jest, że punkt C znajduje się na Morzu Norweskim, ale punkt A, do którego płynie statek, a także część trasy statku nie znajduje się na morzu. Natomiast jeśli zmienimy w treści zadania mile geograficzne na mile morskie (1 mila morska odpowiada długości łuku opartego na $\frac{1}{60}^{\circ}$), to dostajemy bardziej realistyczny wynik – trasa statku znajduje się w całości na morzu, a miejsce A znajduje się w okolicach Edynburga.

18

Gwiazda

Gwiazda znajduje się na SW na wysokości $h_1 = 52°$, a druga na WNW na wysokości $h_2 = 22°$. Jaka jest odległość kątowa między nimi?

Źródło: [1, sygn. 247, str. 5 – 6], matura z 13.02.1911 r.

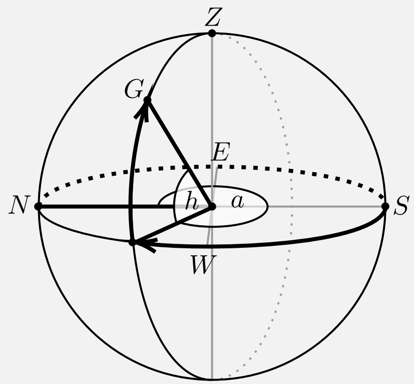


Rysunek do zadania wykonany przez Stanisława Abela, 13.02.1911 r.

Rozwiązanie:

Położenie gwiazdy na niebie:

Aby określić położenie gwiazdy G na niebie, podajemy położenie jej rzutu na sferę niebieską. Jest to sfera o dowolnym promieniu, której środkiem jest punkt, w którym znajduje się obserwator. Jednym z układów współrzędnych sferycznych, w którym zapisuje się położenie gwiazdy, jest **układ horyzontalny**. Położenie w tym układzie określamy za pomocą dwóch współrzędnych: **azymutu** (odpowiednik długości geograficznej) oraz **wysokości** (odpowiednik szerokości geograficznej). Okrąg wielki na sferze niebieskiej powstający poprzez przecięcie sfery niebieskiej i płaszczyzny prostopadłej do linii pionu nazywamy **linią horyzontu**. Punkt przecięcia sfery niebieskiej i linii pionu znajdujący się dokładnie nad obserwatorem nazywamy **zenitem** i oznaczamy literą Z.

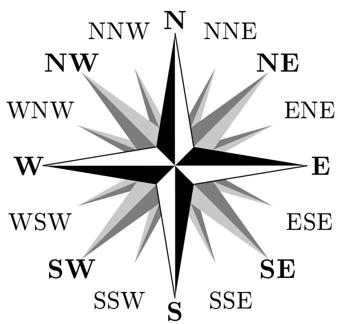


Azymutem a punktu G na sferze niebieskiej nazywamy kąt między półpłaszczyzną wyznaczoną przez linię pionu i punkt N a półpłaszczyzną wyznaczoną przez linie pionu i punkt G. Azymut mierzony jest w kierunku wschodnim i przyjmuje wartości od 0° do 360°. **Wysokością** h punktu G nazywamy kąt między płaszczyzną horyzontu a prostą przechodzącą przez punkt G i środek sfery. Wysokość przyjmuje wartości od -90° do 90°. **Odległością kątową** między gwiazdami nazywamy odległość sferyczną ich rzutów na sferę niebieską.

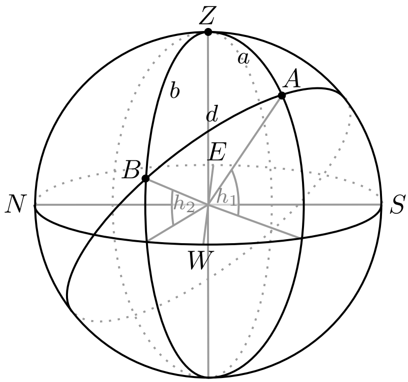
Komentarz (Zofia Gołaska):

Niekiedy przyjmuje się, że azymut jest mierzony od półpłaszczyzny zawierającej punkt S i/lub przyjmuje wartości od -180° do 180°.

Pierwsza gwiazda jest widoczna na południowym zachodzie, więc jej azymut a_1 wynosi 225°. Druga gwiazda jest w kierunku zachodnio-północno-zachodnim, więc jej azymut a_2 wynosi $292,5^\circ$.



Musimy obliczyć długość boku w trójkącie sferycznym utworzonym przez punkty A (pierwszą gwiazdę), B (drugą gwiazdę) oraz Z (zenit).



Kąt AZB w tym trójkącie jest różnicą azymutów tych gwiazd

$$\sphericalangle AZB = a_2 - a_1 = 292,5^\circ - 225^\circ = 67,5^\circ.$$

Niech a i b będą długościami sferycznymi boków ZA i ZB odpowiednio. Dla dowolnego punktu na sferze niebieskiej suma odległości sferycznej tego punktu od zenitu i wysokość sumują się do 90°. Stąd mamy następujące równości:

$$a = 90^\circ - h_1 = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$$
$$b = 90^\circ - h_2 = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ.$$

Niech d oznacza odległość sferyczną punktów A i B. Korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkątów sferycznych w trójkącie ABZ mamy:

$$\cos d = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \sphericalangle AZB.$$

Stąd

$$\cos d = \cos 38^\circ \cdot \cos 68^\circ + \sin 38^\circ \cdot \sin 68^\circ \cdot \cos 67,5^\circ$$
$$\approx 0,51364.$$

Odległość kątowa między gwiazdami wynosi zatem $d \approx 59,09329^\circ$.

Autorka rozwiązania: *Zofia Gołaska*
Opieka merytoryczna: *dr Adam Przestacki*

Część VI

Zadania z kontekstem fizycznym

19

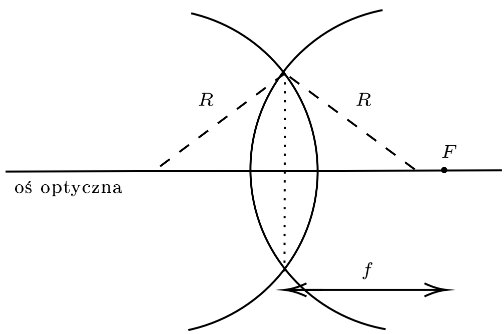
Objętość soczewki dwuwypukłej

Jaka jest objętość soczewki dwuwypukłej, która jest jednakowo zakrzywiona z obu stron, jeśli punkt świetlny na obrazie w odległości $a = 47$cm przed soczewką daje obraz w odległości $\alpha = 53$cm za soczewką. Soczewka ma grubość $d = 0,4$cm w najgrubszym miejscu.

Źródło: [1, sygn. 160, str. 7–8, matura z 5.02.1896 r.]

Rozwiązanie:

Ponownie, jak w przypadku zadania 4 omawianego w Części I książki, mamy styczność z soczewką dwuwypukłą – tym razem symetryczną, tzn. promienie krzywizny R_1 i R_2 są sobie równe. Oznaczmy je jako R. Omawianą sytuację przedstawia poniższy rysunek.



Ze względu na fakt, że nie został podany współczynnik załamania ośrodka, w którym znajduje się soczewka, przyjmujemy, że zanurzona jest ona w powietrzu ($n_0 \approx 1$). Zgodnie ze wzorami ze strony 46, uzyskujemy relację:

$$\frac{1}{f} = (n_s - 1)\,\frac{2}{R}.$$

Znamy odległość przedmiotu od soczewki a oraz odległość jej obrazu α. Korzystając z połączenia powyższego wzoru z równaniem soczewki (patrz strona 47), otrzymujemy:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = (n_s - 1)\,\frac{2}{R},$$

skąd wyznaczamy promień krzywizny:

$$\begin{aligned} R &= \frac{2\,(n_s - 1)}{\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{2\,(n_s - 1)}{\frac{1}{47} + \frac{1}{53}} \\ &= \frac{2491\,(n_s - 1)}{50} \\ &= 49,82\,(n_s - 1)\,[\mathrm{cm}]\,. \end{aligned}$$

Aby obliczyć objętość, musimy zauważyć, że omawiana bryła jest ograniczona przez dwie połączone czasze. Przypomnijmy, że czasze były przez nas omawiane w Rozdziale 13. Szukaną objętość soczewki opisuje relacja $V_s = 2V$, gdzie przez V rozumiemy objętość odcinka kuli o promieniu R. Zgodnie ze wzorem ze strony 120 przy $h = \frac{d}{2}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3}h^2(3R - h) \\ &= \frac{\pi(0,2)^2}{3}\,(3 \cdot 49,82 \cdot (n_s - 1) - 0,2) \\ &= 6,26057n_s - 2,62894\,\left[\mathrm{cm}^3\right]. \end{aligned}$$

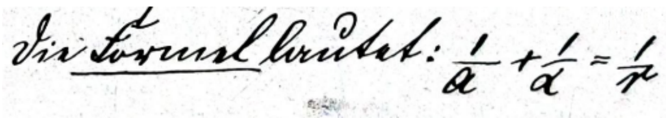
Ostatecznie, podwojona objętość odcinka kuli, czyli szukana objętość soczewki, to:

$$V_s = 2(6,26057n_s - 2,62894) = 12,5211n_s - 5,25788\,\left[\mathrm{cm}^3\right],$$

gdzie n_s jest współczynnikiem załamania materiału, z którego została wykonana soczewka.

Autorka rozwiązania: *Adrianna Smolińska*
Opieka merytoryczna: *prof. UAM dr hab. Wojciech Dybalski*

Maturzysta Caro prawdopodobnie pochodził z rodziny gnieźnieńskiego rabina, z której pochodził również niemiecki historyk Jakob Caro zajmujący się m.in. dziejami Polski. Brakuje jednak akt, które mogłyby jednoznacznie potwierdzić to przypuszczenie.


Die Formel lautet: $\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{r}$

Fragment rozwiązania ucznia Caro, 5.02.1896 r.

Komentarz (Adrianna Smolińska):

Oryginalne rozwiązanie ucznia nie jest poprawne. Na początku zadania abiturient zastosował równanie, podstawiając zamiast ogniskowej – promień, tzn.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$$

zamiast

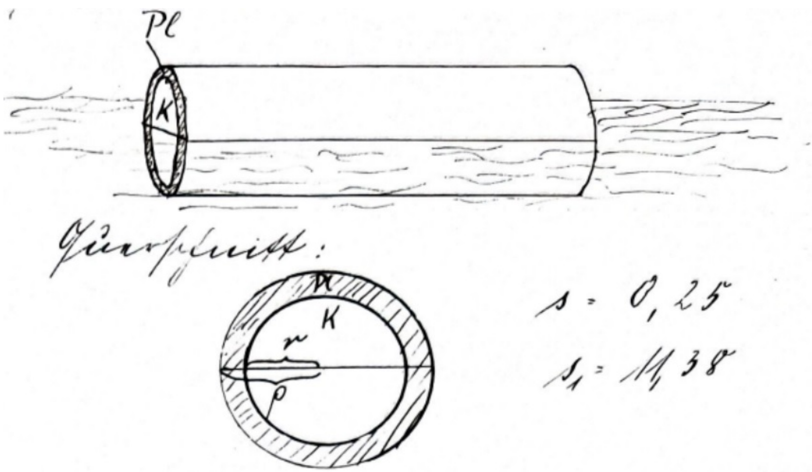
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}.$$

W treści zadania nie podano współczynnika załamania materiału, z którego została wykonana soczewka. Oczekiwano wyniku od niego zależnego. W kontekście ówczesnych matur nie jest to zabieg często spotykany, jednak występuje niekiedy w zadaniach dotyczących zastosowań.

20
Cylinder

Cylinder korkowy ($s = 0,25$) o średnicy 20cm, otoczony jest cylindrowym płaszczem ołowianym ($s' = 11,38$). Jak gruba musi być ołowiana powłoka, aby ciało leżące na boku zanurzyło się do połowy w wodzie?

Źródło: [1, sygn. 267, str. 3, 8 – 9], matura z 2. marca 1916 r.

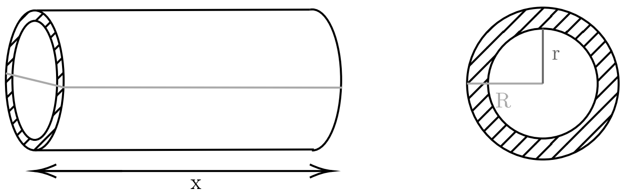


Rysunek do zadania wykonany przez abiturienta, 2. marca 1916 r.

Komentarz (Adrianna Smolińska):

W poleceniu, przy podaniu gęstości, nie zostały uwzględnione jednostki! Zarówno gęstość korka, jak i ołowiu, są podane w $\frac{g}{cm^3}$. *W zadaniu skorzystam również z gęstości wody, zakładając jej przybliżoną wartość* $1\frac{g}{cm^3}$.

Rozwiązanie:
Zacznijmy od wykonania rysunku ciała leżącego w wodzie oraz jego przekroju poprzecznego. Zakreskowana część to ołowiana powłoka, wnętrze jest korkowe.



Z polecenia wiemy, że średnica cylindra korkowego wynosi $20cm$, zatem promień mierzy $r = 10cm$. Przez R oznaczmy promień cylindra ołowianego, a przez x – długość ciała. Ponadto dane są gęstość korka $s = 0,25\frac{g}{cm^3}$ i ołowiu $s' = 11,38\frac{g}{cm^3}$. Szukaną jest grubość ołowianej powłoki, czyli różnica $R - r$.

Siła grawitacji:

Siła grawitacji (inaczej ciężar) to siła, z jaką Ziemia przyciąga obiekty do swojej powierzchni. Wyraża się wzorem:

$$F_g = mg,$$

gdzie m jest masą, a g przyspieszeniem ziemskim. Jednostką siły jest niuton (oznaczany literą N).

Gęstość:

Gęstość (inaczej masa właściwa) ρ to stosunek masy do

objętości obiektu:
$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Jednostką gęstości w układzie SI jest $\frac{kg}{m^3}$.

Prawo Archimedesa:

Na ciało (częściowo lub całkowicie) zanurzone w płynie działa pionowa, skierowana ku górze siła wyporu F_w, której wartość jest równa ciężarowi płynu wypartego przez to ciało:
$$F_w = m_p g = \rho_p V g,$$

gdzie m_p to masa wypieranego płynu, ρ_p to gęstość wypieranego płynu, g – przyspieszenie grawitacyjne, V – objętość wypieranego płynu (równa objętości zanurzonej w płynie części ciała).

Warto dodać, że jeżeli ciało pływa w płynie, to wartości oddziałujących na nie sił wyporu oraz ciężkości równoważą się:

$$F_w = F_g.$$

Z taką sytuacją spotykamy się w zadaniu - cylinder zanurzony jest do połowy w wodzie. Zauważmy, że łącząc wzory na siłę grawitacji oraz gęstość, możemy przedstawić ciężar zgodnie ze wzorem:
$$F_g = \rho V g,$$

gdzie ρ jest gęstością ciała.

Walec:

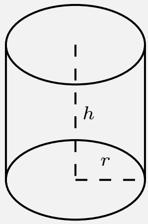
Walec kołowy prosty powstaje poprzez obrót prostokąta wokół jednego z jego boków. Podstawą bryły jest koło, a jej szerokość jest taka sama w każdym miejscu. Na pole powierzchni całkowitej walca składają się dwa pola podstawy – $P_p = \pi r^2$, oraz pole powierzchni bocznej – $P_b = 2\pi r h$:

$$P = 2\pi r \left(r + h\right),$$

a objętość opisuje wzór:

$$V = \pi r^2 h,$$

gdzie r jest promieniem koła w podstawie, a h wysokością bryły.



Cylinder jest walcem, więc jego objętość wyraża się powyższym wzorem. Na ciężar ciała składają się ciężar korkowego cylindra i jego ołowianej powłoki:

$$F_{\text{ciała}} = gs\pi r^2 x + gs' \left(\pi R^2 x - \pi r^2 x\right),$$

gdzie $\pi r^2 x$ to objętość części korkowej, a $\pi R^2 x - \pi r^2 x$ – ołowianej. Pozostało jedynie wziąć pod uwagę, że ciało ma być zanurzone do połowy w wodzie. Zatem ciężar wypartej wody to:

$$F_{\text{wody}} = s_{\text{wody}} \cdot g \cdot \frac{\pi R^2 x}{2}.$$

Po uwzględnieniu, że $s_{\text{wody}} = 1 \frac{g}{cm^3}$, otrzymujemy:

$$\frac{g\pi R^2 x}{2} = gs\pi r^2 x + gs' \left(\pi R^2 x - \pi r^2 x\right).$$

Po skróceniu przyspieszenia ziemskiego g, długości ciała x, liczby π oraz uporządkowaniu wyrazów, dostajemy:

$$R^2 = \frac{r^2 \left(s - s'\right)}{\left(\frac{1}{2} - s'\right)} = \frac{10^2 \left(0,25 - 11,38\right)}{\left(\frac{1}{2} - 11,38\right)} \approx 102,297794 \left[cm^2\right].$$

Ponieważ R jest promieniem, więc $R > 0$. Możemy zatem spierwiastkować obie strony:

$$R = \sqrt{102,2978} \approx 10,1142 \ [cm].$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$R - r \approx 10,1142 - 10 = 0,1142\,[cm]\,.$$

Stąd, aby ciało pływało zanurzone do połowy, ołowiana powłoka powinna mieć grubość około $0,1142$cm.

Autorka rozwiązania: *Adrianna Smolińska*
Opieka merytoryczna: *prof. UAM dr hab. Michał Jasiczak*

Komentarz (Adrianna Smolińska):

W powyższym zadaniu, Ciężar kuli w stożku (21) i Aluminiowy ostrosłup (22) nie zostały uwzględnione niektóre jednostki. Współcześnie ich brak przyprawiłby nas o zawrót głowy! Jednakże ówcześnie nie było to niczym zaskakującym. Trzy badane matury są z lat 1916, 1905 *oraz* 1910. *W poleceniach zadań pominięto jednostki gęstości i ciężaru właściwego. Są to wielkości pośrednie, tzn. takie, których wyznaczenie wymaga pomiarów innych wielkości w sposób bezpośredni. Pomiar bezpośredni wielkości fizycznej polega na porównaniu jej z wielkością wzorcową, umownie przyjętą za jednostkę miary danej wielkości. Współcześnie każdy z nas jest przyzwyczajony do Międzynarodowego Układu Jednostek Miar – SI (fr. Système international d'unités), w którym podstawowymi jednostkami są metr, kilogram czy kelwin. Dla niektórych czytelników zaskoczeniem może okazać się, że układ ten został zatwierdzony dopiero w roku* 1960 *na XI Generalnej Konferencji Miar! Jednakże historia miar sięga zarania dziejów, a pozostałości ich wzorców występują w najstarszych znaleziskach archeologicznych. Dawniej jednostki miar ustalane były niezależnie – nawet na tym samym obszarze geograficznym jednostki o jednakowych nazwach potrafiły nieść za sobą zupełnie inne znaczenie czy wielkość. Naszych abiturientów dotyczyła Międzynarodowa Konwencja Metryczna, której celem było ujednolicenie systemu miar, podpisana w* 1875 *r. przez* 17 *państw, w tym przez Jego Cesarską Mość Cesarza Niemieckiego Wilhelma I Hohenzollerna. Dotyczyła ona przyjęcia konwencji zaproponowanej w 1874 r.,* *mianowicie CGS (Centymetr – Gram – Sekunda) opracowanej przez British Association for the Advancement of Science. Wówczas, np. siłę definiowano w dynach, czyli* $\left[\frac{g\cdot cm}{s^2}\right]$*, co oznacza siłę nadającą ciału o masie* $1g$ *przyspieszenie równe 1* $\frac{cm}{s^2}$*, tzn.* 1 *gal. Obecnie jednostką siły jest również jednostka pochodna – niuton* $[N]$*, definiowany jako* $\left[\frac{kg\cdot m}{s^2}\right]$*, informujący o sile potrzebnej, aby ciału o masie* 1 *kg nadać przyspieszenie równe* 1 $\frac{m}{s^2}$*. Zakładamy, że w przypadku nienazwania wielkości fizycznej w poleceniu, abiturienci rozpoznawali ją na podstawie innych danych. W końcu styczność z tymi pojęciami mieli przez większość swojej edukacji. Zatem ich bezjednostkowość nie powinna mieć znaczenia! Alternatywnie, w trakcie rozwiązywania problemu, wiedząc do czego dążą, wnioskować mogli o wprowadzanej wielkości – rozróżniając np. gęstość od ciężaru właściwego. Służyć mógł im wtedy, znany przez nas wszystkich, rachunek jednostek. Zakładamy więc, że standardową dla nich (intuicyjną bądź faktyczną) jednostką gęstości był* $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$*, a ciężaru właściwego* $\left[\frac{g}{cm^2\cdot s^2}\right]$*. Więcej o historii jednostek przeczytać można, np. w artykule Edwarda Musiała „Pisownia oraz wymowa nazw i oznaczeń jednostek miar” [7]. Zachęcamy również do zgłębienia definicji obecnie przyjmowanych konwencji – uzasadnienie sekundy czy kandeli może zadziwić!*

Zarówno w powyższym zadaniu, jak i Ostrosłup w wodzie (22), podczas przedstawiania rozwiązań przywołujemy prawo Archimedesa. Stosownym byłoby również jego użycie przy okazji rozwiązania zestawu II (zadanie 3) z matury z 1908 *r. Zakładamy, że każdemu z czytelników znana jest grecka legenda o tym, w jakich okolicznościach zostało sformułowane, niemniej jednak, pozwolimy sobie ją przypomnieć. Legenda głosi, że król Syrakuz Hieron II zwrócił się do Archimedesa z pytaniem, czy korona wykonana przez syrakuzańskiego złotnika jest w pełni złota, czy może zawiera pozłacane srebro... Sprawdzenie owego faktu musiało odbyć się tak, by korona króla pozostała nieuszkodzona! Ówcześnie jedynym sposobem na zweryfikowanie faktu, czy z tego kruszcu zrobiony jest przedmiot, było jego wyginanie – otóż złoto jest* *materiałem dość miękkim… Archimedes głowił się i głowił, aż podczas pewnej ze swoich kąpieli zauważył fakt niezwykle oczywisty, lecz umykający wszystkim wokół – ilość wody wypływającej z wanny odpowiadała objętości ciała zanurzanego w wodzie. Tutaj narodziło się naukowe wykrzyknienie – „Eureka!” (gr. εὕρηκα), oznaczające „znalazłem!”. Wówczas Archimedes dokonał eksperymentu, w którym dwie bryły o ciężarze równym koronie – jedną ze złota, drugą ze srebra – po kolei umieszczał w zbiorniku z wodą, mierząc ilość wypartego płynu. W ten sposób mógł porównać gęstość (i tym samym ciężar właściwy) złota i srebra. Ponownie napełnił naczynie, wrzucając koronę. Okazało się, że ilość wody, która wypłynęła, była większa niż w przypadku złotej bryły. Oszustwo złotnika zostało zdemaskowane! Prawo to jest szeroko stosowane do dziś, np. w obrębie nawigacji i inżynierii morskiej czy aeronautyce (bezpośrednio w przypadku lotu balonem).*

21

Ciężar kuli w stożku

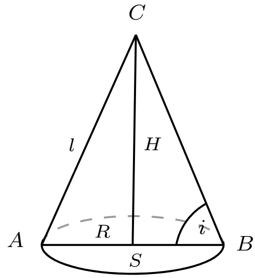
Prosty stożek jest wykonany z materiału, którego ciężar właściwy wynosi $\sigma = 2,54$, a waga to 840kg. Linia boczna stożka tworzy z podstawą kąt $i = 66°54^{'}$. Jaki ciężar ma największa kula wpisana w stożek?

Źródło: [1, sygn. 219, str. 8 – 9], matura przed 11.03.1905 r.

Komentarz (Adrianna Smolińska):

Tak, jak w poprzednim zadaniu (patrz Rozdział 20), w poleceniu nie uwzględniono jednostki! Tym razem pominięto ją dla ciężaru właściwego – Autorka rozwiązania przyjęła, że $\sigma = 2,54\ \frac{kN}{m^3} = 2540\ \frac{N}{m^3}$. *Zwróćmy również uwagę na niecodzienny fakt wybrania literki i jako oznaczenia miary kąta...*

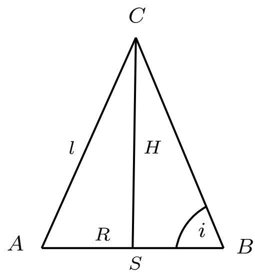
Rozwiązanie:
Zacznijmy od narysowania stożka, wprowadzając niezbędne oznaczenia.



Poprzez H oznaczona została wysokość stożka, przez R – promień jego podstawy, l jest tworzącą (linią boczną) stożka, natomiast i to kąt pomiędzy tworzącą i promieniem. Powołując się na teorię wprowadzoną na stronie 34, przypomnijmy wzór na objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Narysujmy przekrój osiowy tegoż stożka, czyli trójkąt $\triangle ABC$. Interesuje nas zawarty w nim trójkąt $\triangle SBC$.



Zauważmy, że trójkąt $\triangle SBC$ jest prostokątny, dzięki czemu, powołując się na teorię ze strony 39, możemy skorzystać z definicji funkcji trygonometrycznych sinus oraz cosinus. Wyznaczmy zależności pomiędzy wysokością H, tworzącą l oraz promieniem R:

$$\sin i = \frac{H}{l} \quad \Rightarrow \quad H = l \sin i,$$

$$\cos i = \frac{R}{l} \quad \Rightarrow \quad R = l \cos i.$$

W celu policzenia długości H, l oraz R, potrzebujemy skorzystać z danych o masie stożka oraz ciężarze właściwym materiału, z którego został on wykonany.

Ciężar właściwy:

Stosunek ciężaru F_g do objętości V ciała nazywamy ciężarem właściwym σ, tzn.

$$\sigma = \frac{F_g}{V}.$$

Wiedząc, że ciężar jest iloczynem masy i przyspieszenia ziemskiego, możemy zapisać zależność między ciężarem właściwym a gęstością ρ:

$$\sigma = \frac{mg}{V} = \rho g,$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim.

Podstawiając dane do wzoru na objętość stożka, mamy:

$$V = \frac{1}{3}\pi(\cos i)^2 l^3 \sin i.$$

Wprowadzając powyższe wyliczenie do wzoru na ciężar właściwy, dostajemy:

$$\sigma = \frac{mg}{V} = \frac{mg}{\frac{1}{3}\pi(\cos i)^2 l^3 \sin i}.$$

Przekształcając otrzymany wzór, wyznaczamy wzór na tworzącą l:

$$l = \sqrt[3]{\frac{3mg}{\sigma\pi(\cos i)^2 \sin i}}.$$

Za pomocą kalkulatora obliczamy:

$$\sin i \approx 0,92 \quad \text{oraz} \quad \cos i \approx 0,392.$$

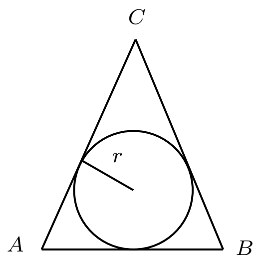
Podstawiając znane wartości do wzoru na tworzącą l, przyjmując przybliżenie $\pi \approx 3,14$ oraz $g \approx 9,81 \ \frac{m}{s^2}$ otrzymujemy:

$$l = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 840 \cdot 9,81}{2540 \cdot 3,14 \cdot (0,392)^2 \cdot 0,92}} \approx 2,7989 \ [m].$$

Następnie wyliczamy wartości liczbowe wysokości H i promienia R:

$$H \approx 2,575 \ [m] \quad \text{oraz} \quad R \approx 1,0971 \ [m].$$

Skupimy się teraz na okręgu wpisanym w trójkąt $\triangle ABC$.



Skorzystamy ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt (patrz str. 41). Wiedząc, że trójkąt $\triangle ABC$ jest równoramienny o długości ramion $|AC| = |BC| = l$ i podstawie $|AB| = 2R$, możemy zapisać:

$$r = \sqrt{\frac{(p-2R)(p-l)^2}{p}},$$

gdzie p jest połową obwodu trójkąta, czyli u nas:

$$p = \frac{1}{2}(2R + 2l) = l + R.$$

Po wykonaniu niezbędnych obliczeń, otrzymujemy przybliżoną wartość promienia okręgu:

$$r \approx 0,7251 \ [m].$$

Znając zależność ciężaru i ciężaru właściwego, powołując się na wzór na objętość kuli (patrz str. 36), możemy obliczyć poszukiwany ciężar największej kuli wpisanej w stożek:

$$F_g = mg = \sigma V = \sigma \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4056,17\ [N].$$

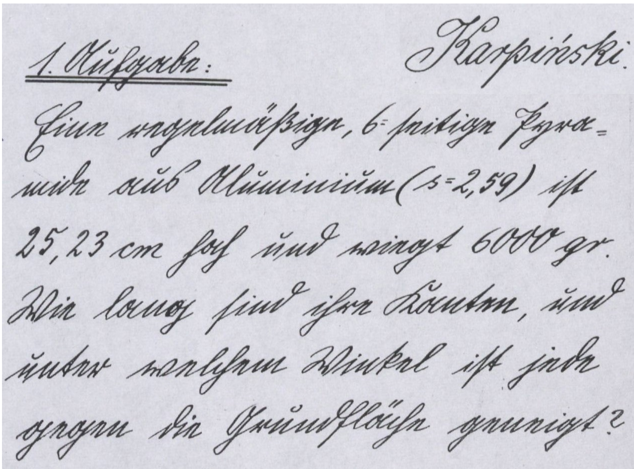
Co kończy rozwiązanie.

Autorka rozwiązania: *Anna Szymczyk*
Opieka merytoryczna: *dr Paweł Płaczek*

22

Aluminiowy ostrosłup

Regularny ostrosłup sześciokątny wykonany z aluminium ($s = 2,59$) ma wysokość 25,23cm i waży 6000 gramów. Jak długie są jego krawędzie i pod jakim kątem są nachylone do podstawy?
Źródło: [1, sygn. 246, str. 34 – 36], matura z 21.01.1910 r.

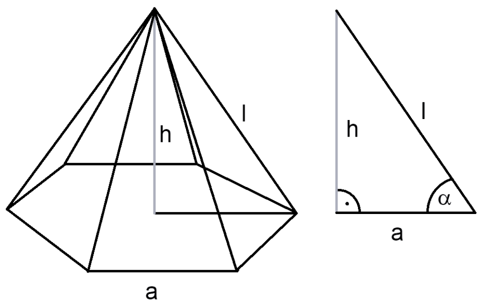

1. Aufgabe: Karpiński.
Eine regelmäßige, 6=seitige Pyramide aus Aluminium (s=2,59) ist 25,23 cm hoch und wiegt 6000 gr. Wie lang sind ihre Kanten, und unter welchem Winkel ist jede gegen die Grundfläche geneigt?

Treść zadania zapisana przez Zygmunta Karpińskiego, 21.01.1910 r.

Komentarz (Adam Nawrocki):

Za pominiętą jednostkę gęstości przyjmiemy $\frac{g}{cm^3}$.

Rozwiązanie:
Zacznijmy od narysowania sytuacji z polecenia.



W zadaniu skorzystamy z następujących oznaczeń: V oznacza objętość ostrosłupa, m – jego masę, a P_p – pole podstawy. Symbol l oznacza długość krawędzi bocznej, natomiast α – kąt między krawędzią boczną a podstawą. Oznaczenie a odnosi się do długości krawędzi podstawy, a s do gęstości materiału ostrosłupa (patrz str. 176). Korzystając z definicji gęstości jako stosunku masy do objętości:

$$m = V \cdot s$$
$$6000g = V \cdot 2,59\frac{g}{cm^3}$$
$$V = \frac{6000g}{2,59\frac{g}{cm^3}}$$
$$V = 2316,60cm^3$$

Mając objętość oraz wysokość, możemy wyliczyć pole podstawy ostrosłupa w następujący sposób:

$$V = P_p \cdot h$$

$$P_p = \frac{2316,60cm^3}{25,23cm}$$
$$P_p = 91,82cm^2$$

Wiemy, że pole sześciokąta foremnego to pole sześciu trójkątów równobocznych o boku równym boku sześciokąta, więc możemy stąd wyliczyć a^2:

$$P_p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$P_p = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$
$$3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 91,82cm^2$$
$$a^2\sqrt{3} = 61,21cm^2$$
$$a^2 = 35,38cm^2$$

Z twierdzenia Pitagorasa (patrz str. 35) wiemy, że:

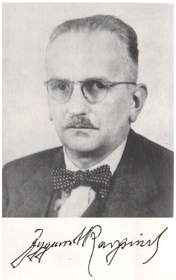
$$l^2 = h^2 + a^2$$
$$l = \sqrt{h^2 + a^2}$$
$$l = 25,92cm$$

Wiemy też, że:

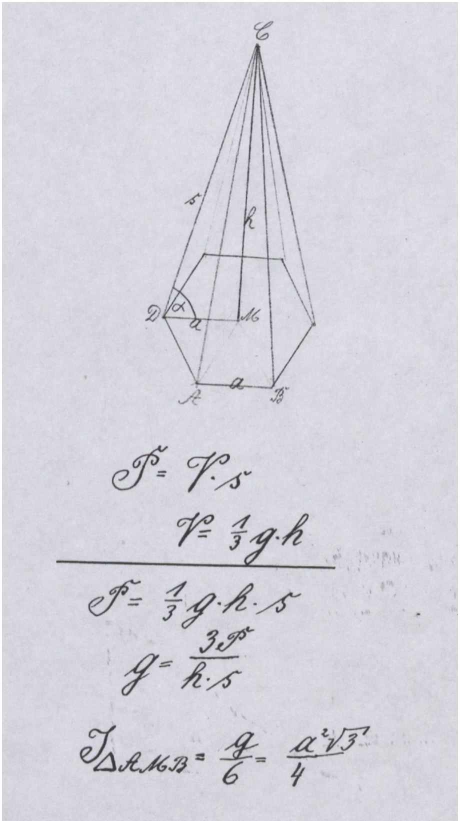
$$\sin(\alpha) = \frac{h}{l} = 0,97$$
$$\sin(76^\circ) \approx 0,97$$

Więc $\alpha = 76^\circ$, a $l = 25,92$.

Autor rozwiązania: *Adam Nawrocki*
Opieka merytoryczna: *prof. UAM dr hab. Michał Jasiczak*



Sylwetka abiturienta: Zygmunt Karpiński, ur. 24 marca 1892 w Gnieźnie. Maturę zdawał w 1910 r. Jego ojcem był adwokat Antoni Karpiński, obrońca polskich działaczy niepodległościowych przed sądami pruskimi. Bratem matki Zygmunta, Wandy, był Heliodor Święcicki, założyciel i pierwszy rektor Uniwersytetu Poznańskiego. Zygmunt studiował ekonomię w Strasburgu, Monachium i Berlinie. W okresie międzywojennym pełnił funkcje m.in. sekretarza Komitetu Organizacyjnego oraz dyrektora działu walutowego Banku Polskiego. W 1939 r. odpowiadał za ewakuację złota, dewiz i dokumentów Banku Polskiego (emisyjnego) z Warszawy do Francji. Zmarł 2 lutego 1981 r. w Warszawie.

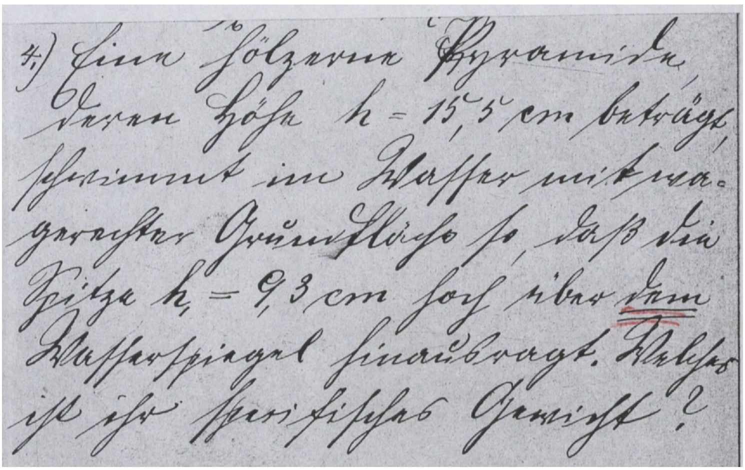


Rysunek poglądowy i fragment rozwiązania sporządzone przez Zygmunta Karpińskiego, 21.01.1910 r.

23

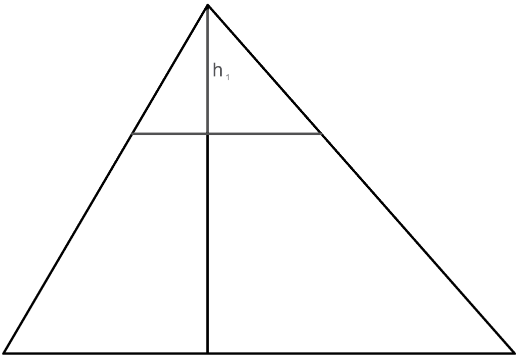
Ostrosłup w wodzie

Drewniany ostrosłup o wysokości $h = 15{,}5\text{cm}$ unosi się w wodzie tak, że podstawa jest równoległa do tafli wody oraz czubek wystaje na wysokość $h_1 = 9{,}3\text{cm}$ ponad poziom wody. Jaki jest ciężar właściwy ostrosłupa?
Źródło: [1, sygn. 228, str. 4, 9 – 10], matura z 6.02.1907 r.


4.) Eine hölzerne Pyramide,
deren Höhe $h = 15{,}5$ cm beträgt,
schwimmt im Wasser mit wa-
gerechter Grundfläche so, daß die
Spitze $h_1 = 9{,}3$ cm hoch über dem
Wasserspiegel hinausragt. Welches
ist ihr spezifisches Gewicht?

Treść zadania zapisana przez Józefa Chilomera, 6.02.1907 r.

Rozwiązanie:
Poniżej przedstawiamy rysunek w rzucie bocznym.



Na potrzeby zadania przyjmujemy, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10\frac{N}{kg}$, a gęstość wody to $d_w = 1000\frac{kg}{m^3}$. Ciężar właściwy γ_w wody można wyrazić wzorem $\gamma_w = d_w g = 1000\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{N}{kg} = 10000\frac{N}{m^3}$ (patrz str. 176).

Wiemy, że stosunek wysokości wystającej nad wodę części ostrosłupa do wysokości całego ostrosłupa to

$$\frac{9{,}3}{15{,}5} = \frac{3}{5}.$$

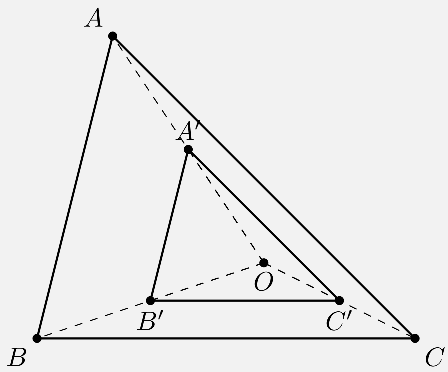
Jednokładność:

Jednokładnością o środku O i skali $k \neq 0$ nazywamy przekształcenie geometryczne, które każdemu punktowi A przypisuje taki punkt A', że punkty O, A, A' leżą na jednej prostej, spełnione jest

$$|OA'| = |k| \cdot |OA|$$

oraz punkty A, A' leżą po tej samej stronie punktu O

dla $k > 0$, zaś po przeciwnej dla $k < 0$. Na poniższym rysunku trójkąt $A'B'C'$ jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku w O i pewnej skali $0 < k < 1$.



Wystająca nad wodę część ostrosłupa jest obrazem całego ostrosłupa w jednokładności o środku w wierzchołku ostrosłupa, w skali $\frac{3}{5}$. Z własności podobieństwa figur wiemy, że stosunek objętości wystającej nad wodę części ostrosłupa do objętości całego ostrosłupa jest sześcianem skali jednokładności, czyli

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125},$$

gdzie V_1 to objętość wystającej nad wodę części ostrosłupa. Po przemnożeniu stronami przez V otrzymujemy

$$V_1 = \frac{27}{125}V.$$

W dalszej części rozwiązania skorzystamy z prawa Archimedesa (patrz str. 177). Wiemy zatem, że ciężar wody Q_w wypartej przez ostrosłup jest równy ciężarowi całego ostrosłupa Q_s. Ciężar właściwy ostrosłupa γ_s to ciężar podzielony przez objętość, zatem

$$\gamma_s = \frac{Q_s}{V} = \frac{Q_w}{V}.$$

Analogicznie ciężar właściwy wody wynosi

$$\gamma_w = \frac{Q_s}{V - V_1}.$$

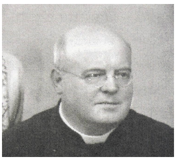
Podstawiając za V_1 wyznaczoną wartość, otrzymujemy

$$\gamma_w = \frac{Q_s}{V - \frac{27}{125}V} = \frac{125}{98}\frac{Q_s}{V} = \frac{125}{98}\gamma_s,$$

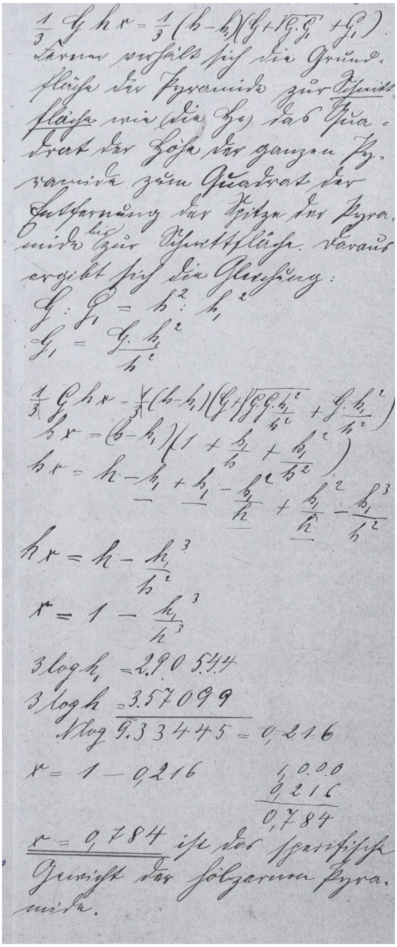
czyli

$$\gamma_s = \frac{98}{125}\gamma_w = \frac{98}{125} \cdot 10000\frac{N}{m^3} = 7840\frac{N}{m^3}.$$

Autor rozwiązania: *Adam Nawrocki*
Opieka merytoryczna: *prof. UAM dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga*



Sylwetka abiturienta: Józef Chilomer, ur. 16 marca 1885 r. w Dominowie (pow. Środa). Maturę zdawał w 1907 r. Studiował w Seminarium Duchownym w Poznaniu i w Gnieźnie. Święcenia przyjął 15 lutego 1913 r. w Gnieźnie. Od 1923 r. do śmierci proboszcz gnieźnieńskiej parafii p.w. św. Wawrzyńca. Aresztowany 26 sierpnia 1940 r. Przebywał w obozach koncentracyjnych w Sachsenhausen i Dachau, gdzie zmarł 5 sierpnia 1942 r.



$\frac{1}{3} G h x = \frac{1}{3}(h-h_1)(G+\sqrt{G \cdot G_1}+G_1)$
Daraus verhält sich die Grundfläche der Pyramide zur Schnittfläche wie (die Höhe) das Quadrat der Höhe der ganzen Pyramide zum Quadrat der Entfernung der Spitze der Pyramide bis zur Schnittfläche. Daraus ergibt sich die Gleichung:

$G : G_1 = h^2 : h_1^2$

$G_1 = \frac{G \cdot h_1^2}{h^2}$

$\frac{1}{3} G h x = \frac{1}{3}(h-h_1)\left(G+\sqrt{G \cdot G \frac{h_1^2}{h^2}} + G \frac{h_1^2}{h^2}\right)$

$h x = (h-h_1)\left(1 + \frac{h_1}{h} + \frac{h_1^2}{h^2}\right)$

$h x = h - h_1 + h_1 - \frac{h_1^2}{h} + \frac{h_1^2}{h} - \frac{h_1^3}{h^2}$

$h x = h - \frac{h_1^3}{h^2}$

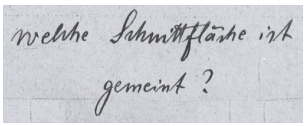
$x = 1 - \frac{h_1^3}{h^3}$

$3 \log h_1 = 2.90544$
$3 \log h = 3.57099$
$N \log 9.33445 = 0,216$

$x = 1 - 0,216$ $1,000 - 0,216 = 0,784$

$x = 0,784$ ist das spezifische Gewicht der hölzernen Pyramide.

(a) Fragment rozwiązania Józefa Chilomera, 6.02.1907 r.



welche Schnittfläche ist gemeint?

(b) Komentarz nauczyciela: O którą powierzchnię cięcia chodzi? (z niemieckiego)

Część VII

Zadania z gimnazjum w Trzemesznie

24

Trójkąt i równanie wykładnicze

W trójkącie płaskim dwa z boków mają długość x, gdzie x jest rozwiązaniem równania

$$10^{(x-4)(x-5)} = 100.$$

Miara kąta leżącego naprzeciwko większego boku wynosi 43°. Oblicz pole tego trójkąta.

Źródło: [2, sygn. 40, str. 328–330], egzamin z 7.07.1851, uczeń Józef Sąchocki

Rozwiązanie:

Obliczmy długości boków trójkąta, rozwiązując równanie wykładnicze:

$$10^{(x-4)(x-5)} = 100$$
$$10^{(x-4)(x-5)} = 10^2$$

Z różnowartościowości funkcji wykładniczej otrzymujemy wówczas równanie kwadratowe:

$$(x-4)(x-5) = 2$$
$$x^2 - 4x - 5x + 20 - 2 = 0$$
$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

Obliczmy jego wyróżnik:

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$$

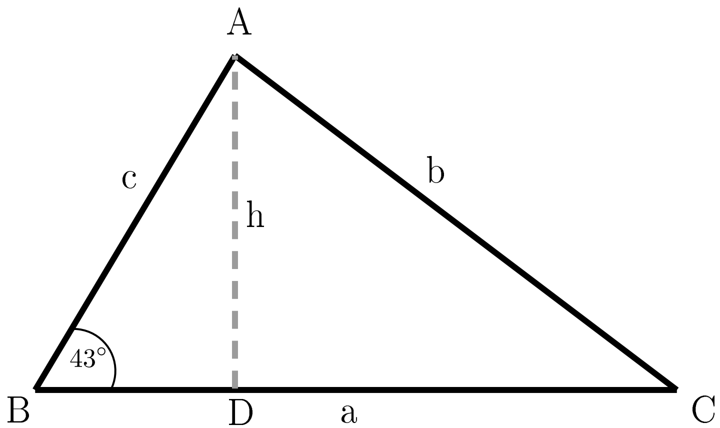
Pierwiastek z wyróżnika wynosi zatem:

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

Stąd:

$$x_1 = \frac{9-3}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{9+3}{2} = 6$$

Długości boków trójkąta wynoszą zatem 3 i 6, czyli $b = 6$ oraz $c = 3$.



Rozważając trójkąt prostokątny ABD dostajemy wartość wysokości h (patrz definicje funkcji trygonometrycznych na stronie 39):

$$\sin 43^\circ = \frac{h}{3}$$
$$h = 3 \cdot \sin 43^\circ$$
$$h \approx 3 \cdot 0,6820 = 2,046$$

Obliczmy teraz sinus kąta $\angle C$:

$$\sin \angle C = \frac{h}{6}$$

$$\sin\angle C \approx \frac{2,046}{6}$$
$$\sin\angle C \approx 0,341$$

Stąd miara kąta C wynosi $20°$. Kąt przy wierzchołku A ma zatem miarę:

$$|\angle A| \approx 180° - 20° - 43° = 117°$$

Z twierdzenia sinusów (patrz str. 42) dla trójkąta ABC otrzymujemy:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{3}{\sin\angle C}$$
$$a = \frac{3\cdot\sin\angle A}{\sin\angle C}$$

To pozwala nam na znalezienie wartości $\sin\angle A$:

$$\sin\angle A \approx \sin 117° = \sin(180° - 63°) = \sin 63° \approx 0,891$$

Stąd:

$$a \approx \frac{3\cdot 0,891}{0,341} = 7,838$$

Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{a\cdot h}{2} \approx \frac{7,838\cdot 2,046}{2} \approx 8,019 \approx 8,02\ [\mathrm{j}^2]$$

Autorka rozwiązania: *Aurelia Tycka–Witek*
Opieka merytoryczna: *dr Jędrzej Garnek*

25

Równanie wymierne

Wyznacz x z poniższego równania:

$$0,5 - \frac{3,5x}{x-2} - \frac{24-3x}{8} = 0,375x.$$

Źródło: [2, sygn. 73, str. 38], egzamin z 1.09.1911 r.

Rozwiązanie:

Z postaci równania wynika, że $x \neq 2$. Mnożąc równanie przez $8(x-2)$ otrzymujemy:

$$0,5(8x-16) - 3,5x \cdot 8 - (24-3x)(x-2) = 0,375x(8x-16)$$
$$4x - 8 - 28x - 24x + 3x^2 + 48 = 3x^2 - 6x$$

Upraszczając:

$$3x^2 - 3x^2 + 4x - 28x - 24x - 6x + 6x = 8 - 48$$
$$-48x = -40$$

Stąd dostajemy $x = \frac{5}{6}$.

Autorka rozwiązania: *Aurelia Tycka–Witek*
Opieka merytoryczna: *dr Jędrzej Garnek*

26

Marki

A miał 327 marek, a B miał 237 marek. Ile marek B powinien przekazać A, aby A miał trzy razy więcej niż B zostawił dla siebie?

Źródło: [2, sygn. 79, str. 101], egzamin z marca 1916, uczeń Struck

Rozwiązanie:
Załóżmy, że B musi dać A x marek. Wówczas A będzie miał $327 + x$ marek. Ponieważ A ma 3 razy więcej niż B, dostajemy równanie:

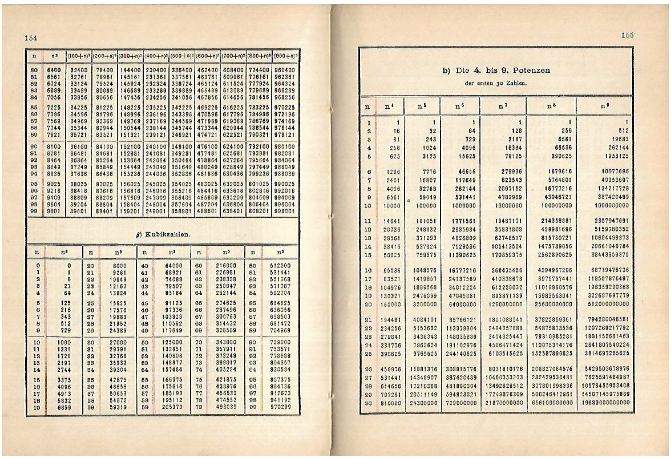
$$\begin{aligned} 327 + x &= 3(237 - x) \\ 327 + x &= 711 - 3x \\ x + 3x &= 711 - 327 \\ 4x &= 384 \\ x &= 96 \end{aligned}$$

Odpowiedź: B musi dać A 96 marek.

Autorka rozwiązania: *Aurelia Tycka–Witek*
Opieka merytoryczna: *dr Jędrzej Garnek*

Tablice logarytmiczne i suwak logarytmiczny

Podczas egzaminów maturalnych studenci mieli możliwość korzystania z **tablic logarytmicznych**. Tablice logarytmiczne zawierały wartości logarytmów dziesiętnych i naturalnych dla różnych liczb, co ułatwiało wykonywanie skomplikowanych obliczeń matematycznych przed erą kalkulatorów. Po raz pierwszy zostały



154

n	n²	(100+n)²	(200+n)²	(300+n)²	(400+n)²	(500+n)²	(600+n)²	(700+n)²	(800+n)²	(900+n)²
80	6400	32400	78400	144400	230400	336400	462400	608400	774400	960400
81	6561	32761	78961	145161	231361	337561	463761	609961	776161	962361
82	6724	33124	79524	145924	232324	338724	465124	611524	777924	964324
83	6889	33489	80089	146689	233289	339889	466489	613089	779689	966289
84	7056	33856	80656	147456	234256	341056	467856	614656	781456	968256
85	7225	34225	81225	148225	235225	342225	469225	616225	783225	970225
86	7396	34596	81796	148996	236196	343396	470596	617796	784996	972196
87	7569	34969	82369	149769	237169	344569	471969	619369	786769	974169
88	7744	35344	82944	150544	238144	345744	473344	620944	788544	976144
89	7921	35721	83521	151321	239121	346921	474721	622521	790321	978121
90	8100	36100	84100	152100	240100	348100	476100	624100	792100	980100
91	8281	36481	84681	152881	241081	349281	477481	625681	793881	982081
92	8464	36864	85264	153664	242064	350464	478864	627264	795664	984064
93	8649	37249	85849	154449	243049	351649	480249	628849	797449	986049
94	8836	37636	86436	155236	244036	352836	481636	630436	799236	988036
95	9025	38025	87025	156025	245025	354025	483025	632025	801025	990025
96	9216	38416	87616	156816	246016	355216	484416	633616	802816	992016
97	9409	38809	88209	157609	247009	356409	485809	635209	804609	994009
98	9604	39204	88804	158404	248004	357604	487204	636804	806404	996004
99	9801	39601	89401	159201	249001	358801	488601	638401	808201	998001

β) Kubikzahlen.

n	n³	n	n³	n	n³	n	n³	n	n³
0	0	20	8000	40	64000	60	216000	80	512000
1	1	21	9261	41	68921	61	226981	81	531441
2	8	22	10648	42	74088	62	238328	82	551368
3	27	23	12167	43	79507	63	250047	83	571787
4	64	24	13824	44	85184	64	262144	84	592704
5	125	25	15625	45	91125	65	274625	85	614125
6	216	26	17576	46	97336	66	287496	86	636056
7	343	27	19683	47	103823	67	300763	87	658503
8	512	28	21952	48	110592	68	314432	88	681472
9	729	29	24389	49	117649	69	328509	89	704969
10	1000	30	27000	50	125000	70	343000	90	729000
11	1331	31	29791	51	132651	71	357911	91	753571
12	1728	32	32768	52	140608	72	373248	92	778688
13	2197	33	35937	53	148877	73	389017	93	804357
14	2744	34	39304	54	157464	74	405224	94	830584
15	3375	35	42875	55	166375	75	421875	95	857375
16	4096	36	46656	56	175616	76	438976	96	884736
17	4913	37	50653	57	185193	77	456533	97	912673
18	5832	38	54872	58	195112	78	474552	98	941192
19	6859	39	59319	59	205379	79	493039	99	970299

155

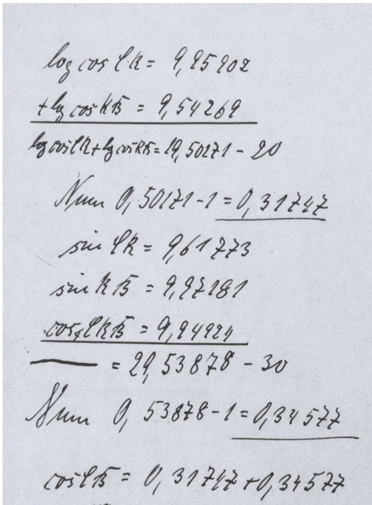
b) Die 4. bis 9. Potenzen

der ersten 30 Zahlen.

n	n⁴	n⁵	n⁶	n⁷	n⁸	n⁹
1	1	1	1	1	1	1
2	16	32	64	128	256	512
3	81	243	729	2187	6561	19683
4	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000
11	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691
12	20736	248832	2985984	35831808	429981696	5159780352
13	28561	371293	4826809	62748517	815730721	10604499373
14	38416	537824	7529536	105413504	1475789056	20661046784
15	50625	759375	11390625	170859375	2562890625	38443359375
16	65536	1048576	16777216	268435456	4294967296	68719476736
17	83521	1419857	24137569	410338673	6975757441	118587876497
18	104976	1889568	34012224	612220032	11019960576	198359290368
19	130321	2476099	47045881	893871739	16983563041	322687697779
20	160000	3200000	64000000	1280000000	25600000000	512000000000
21	194481	4084101	85766121	1801088541	37822859361	794280046581
22	234256	5153632	113379904	2494357888	54875873536	1207269217792
23	279841	6436343	148035889	3404825447	78310985281	1801152661463
24	331776	7962624	191102976	4586471424	110075314176	2641807540224
25	390625	9765625	244140625	6103515625	152587890625	3814697265625
26	456976	11881376	308915776	8031810176	208827064576	5429503678976
27	531441	14348907	387420489	10460353203	282429536481	7625597484987
28	614656	17210368	481890304	13492928512	377801998336	10578455953408
29	707281	20511149	594823321	17249876309	500246412961	14507145975869
30	810000	24300000	729000000	21870000000	656100000000	19683000000000

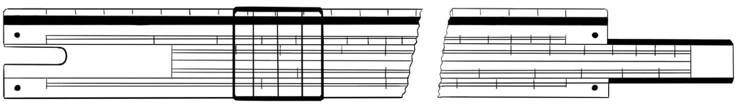
Tablice logarytmiczne autorstwa prof. dra Adolfa Greve, „Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln nebst einer grösseren Anzahl von Hilfstafeln", 1907 r.

wprowadzone przez Johna Napiera w 1614 roku, a ich rozwinięcie i popularyzację przypisuje się Henry'emu Briggsowi. Pozwalały na zamianę mnożenia i dzielenia na prostsze operacje dodawania i odejmowania. Ponadto zawierały wartości logarytmu i funkcji trygonometrycznych. Dzięki temu były nieocenionym narzędziem w obliczeniach geodezyjnych, nawigacyjnych i astronomicznych. Pozwalały na szybkie obliczenia, eliminując konieczność wykonywania skomplikowanych operacji ręcznie. W późniejszych latach tablice zostały częściowo zastąpione **suwakami logarytmicznymi**. Były to przyrządy ułatwiające obliczenia, powszechnie używane, zwłaszcza przez inżynierów, aż do lat 70.–80. XX wieku, kiedy to ostatecznie wyparły je kalkulatory. Postaramy się teraz przybliżyć działanie suwaka – opiszemy jego budowę, wprowadzimy niezbędne pojęcia oraz nauczymy się wykonywać na nim podstawowe działania. Ze względu na poglądowy charakter tekstu, pominiemy kwestie związane z wykonywaniem obli-

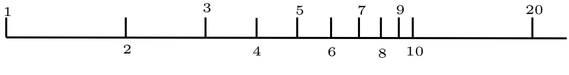


Obliczenia wykonywane przez abiturienta za pomocą tablic logarytmicznych w jednym z zadań maturalnych czeń złożonych.

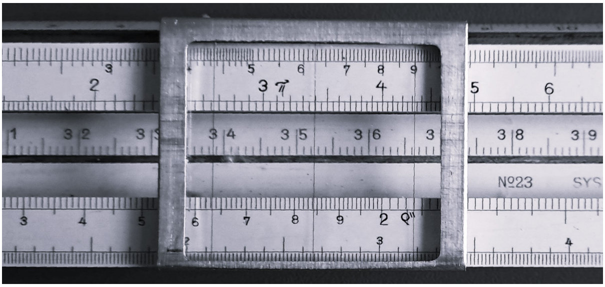
Suwak logarytmiczny składa się z trzech części: **linijki** – części stałej z wyżłobieniem, **wysuwki**, która porusza się wzdłuż wyżłobienia linijki, oraz ruchomego **okienka ze szkiełkiem**, na którym zaznaczone są 2 albo 3 rysy prostopadłe do osi linijki. Podstawowe skale znajdujące się na suwaku to A, B, C, D, I, K, L (ich nazwy mogą się różnić w zależności od suwaka – np. tego, kiedy był tworzony i panujących wówczas standardów). Tylko skala L jest równomierna – odległości między kreskami są jednakowe, jak na zwykłej linijce; pozostałe skale są **logarytmiczne** – odstępy między kreskami odpowiadają wartościom logarytmów dziesiętnych z kolejnych liczb (dlatego też taka linijka zaczyna się od jedynki – $\log 1 = 0$). W skali logarytmicznej odległości między kreskami maleją.

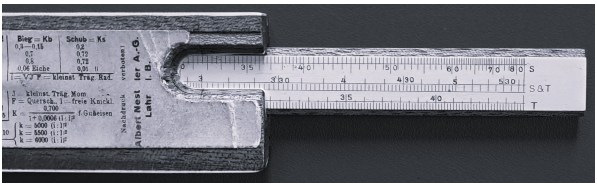


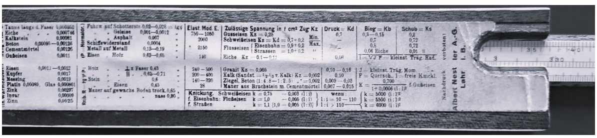
Ponieważ $\log(10^n \cdot a) = n + \log a$, dla $a \in [1, 10]$, $n \in \mathbb{N}$, skala logarytmiczna dla przedziału $[10^n, 10^n + 1]$ jest kopią skali $[1, 10]$. Przykładowo, gdy $n = 1, a = 2$, otrzymujemy $\log 20 = \log(10^1 \cdot 2) = 1 + \log 2$ – wobec tego liczba 20 jest zaznaczona na linijce w odległości $\log 2$ od 10, dokładnie tak samo jak 2 od 1.



Zanim przejdziemy do praktycznego używania suwaka w obliczeniach, wprowadzimy pojęcie **ilości cyfr** danej liczby. Jest to niezbędne, żeby prawidłowo umiejscowić przecinek w wyniku. Dla liczb większych od jeden ilość cyfr jest dodatnia i równa jest







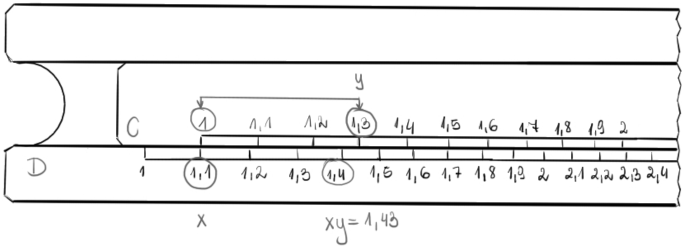
Suwak logarytmiczny marki NESTLER z 1912 r.

ilości cyfr przed przecinkiem, np. $365,12$ ma $+3$ cyfry. Dla liczb mniejszych od jeden ilość cyfr jest ujemna lub zerowa i równa jest ilości zer po przecinku do pojawienia się pierwszej niezerowej cyfry; np. $0,11$ posiada 0 cyfr, a $0,000977 - 3$ cyfry. Każde działanie na suwaku wykonujemy w ściśle określony sposób, kierując się zasadami związanymi z wyborem skal, ustawianiem liczb na suwaku, sposobem odczytania wyniku i ustaleniem jego rzędu wielkości (umiejscowienie przecinka).

Zacznijmy od najprostszego działania – **mnożenia**. Mnożenie liczb za pomocą suwaka oparte jest na twierdzeniu $\log ab = \log a + \log b$. Do obliczania iloczynów wykorzystywana jest skala D – na linijce, oraz C – na wysuwce. W celu pomnożenia dwóch liczb, pierwszą z nich ustawiamy na podziałce nieruchowej D. Przesuwamy wysuwkę tak, by jedynka początkowa wysuwki była naprzeciwko naszej liczby. Wynik odczytujemy na podziałce D, pod drugą liczbą znajdującą się na wysuwce. Ilość cyfr iloczynu dwóch liczb równa się sumie cyfr czynników minus 1, jeżeli wysunęliśmy wysuwkę w prawo, jeżeli natomiast wysuwka była wysunięta w lewo – po prostu sumie cyfr. Ten drugi przypadek ma miejsce, kiedy po ustawieniu jedynki początkowej nad pierwszą liczbą, druga liczba zostanie wysunięta poza linijkę (nic pod nią nie odczytamy). Wtedy zamiast jedynki ustawiamy nad naszą liczbą kolejną potęgę dziesiątki (lub tak zwaną jedynką końcową – w zależności od długości suwaka).

Przykład

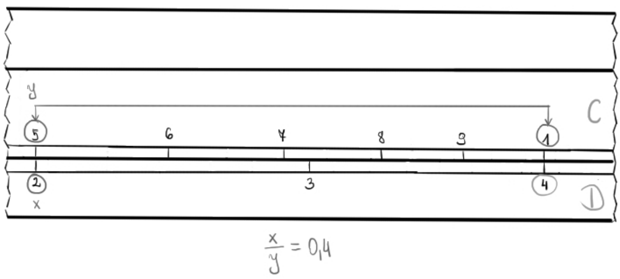
W celu obliczenia $1,1 \cdot 1,3$, ustawiamy $1,1$ na podziałce D pod jedynką początkową podziałki C. Wynik odczytujemy na podziałce D, pod $1,3$ na wysuwce. Ponieważ wysunęliśmy wysuwkę w prawo, ilość cyfr wyniku wynosi $1+1-1=1$. Ostatecznie otrzymujemy $1,1 \cdot 1,3 = 1,43$.



Dzielenie liczb na suwaku opiera się na twierdzeniu $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$. Tutaj również wykorzystywane są skale C oraz D. W celu podzielenia dwóch liczb, przesuwamy wysuwkę tak, aby dzielnik ustawiony na wysuwce znalazł się nad dzielną na linijce. Wynik odczytujemy na podziałce D pod jedynką początkową (wówczas ilość cyfr ilorazu równa jest różnicy cyfr dzielnej i dzielnika plus 1) lub końcową (ilość cyfr wyniku to różnica cyfr dzielnej i dzielnika). Należy pamiętać o wyjątku od tej reguły: kiedy dzielimy jedynkę przez liczbę, stosujemy się do niej tylko wtedy, gdy wysuwamy wysuwkę w lewo.

Przykład

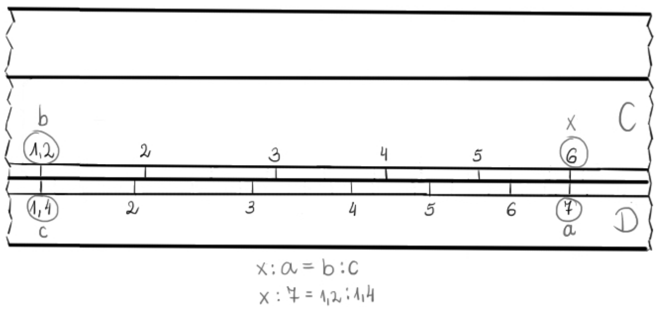
Aby uzyskać wynik działania $2 : 5$, ustawiamy dzielną na podziałce D pod dzielnikiem na wysuwce. Iloraz odczytujemy na podziałce D pod jedynką końcową podziałki C. Ilość cyfr wyniku jest zatem równa $1 - 1 = 0$, czyli ostatecznie $2 : 5 = 0,4$.



Kolejnym przydatnym działaniem, jakie możemy wykonać na suwaku, jest **wyznaczanie czwartej liczby z proporcji** $x : a = b : c$. Tu również ograniczamy się do podziałek C i D. Liczbę b na skali C ustawiamy nad liczbą c na skali D. Na skali C odczytujemy liczbę znajdującą się nad liczbą a leżącą na skali D – jest to nasze szukane x. Aby ustalić ilość cyfr wyniku x, stosujemy następującą zasadę: dla każdej pary liczb stojących naprzeciw siebie na skalach C i D, różnica ilości cyfr jest taka sama.

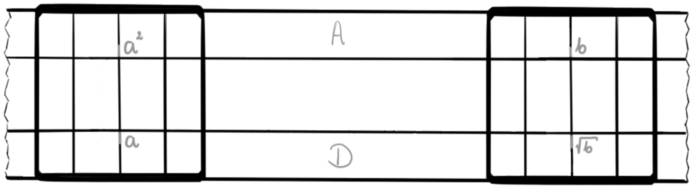
Przykład

Aby wyznaczyć x z proporcji $x : 7 = 1,2 : 1,4$, ustawiamy $1,2$ na podziałce C nad $1,4$ na podziałce D. Wynik odczytujemy na podziałce C nad 7 na skali D. Aby ustalić ilość cyfr wyniku, obliczamy $1 - 1 = y - 1$, skąd $y = 1$. Ostatecznie uzyskujemy $x = 6$.



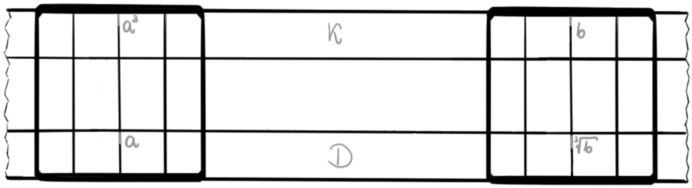
Do obliczania **kwadratu** danej liczby używamy dobrze już znanej skali D oraz skali A. W tym działaniu po raz pierwszy wykorzystamy okienko ze szkiełkiem. Kreskę okienka ustawiamy na naszej liczbie na skali D i odczytujemy wynik pod kreską na skali A – jeżeli jest to lewa połowa skali A, ilość cyfr wyniku równa się podwojonej ilości cyfr naszej liczby minus 1; jeżeli prawa – podwojonej ilości cyfr liczby.

Nieco bardziej skomplikowane jest obliczanie **pierwiastka kwadratowego** z danej liczby b. Najpierw grupujemy cyfry liczby a po dwie: jeżeli $b > 1$ – w lewo od przecinka, jeżeli $b < 1$ – w prawo. W przypadku, gdy w pierwszej grupie z cyframi niezerowymi mamy tylko jedną cyfrę różną od zera, liczbę a ustawiamy w lewej połowie skali A, jeżeli dwie cyfry – w prawej. Wynik odczytujemy pod kreską okienka na skali D. Ilość cyfr pierwiastka z liczby a to ilość grup, gdy $b > 1$, oraz ilość grup zerowych ze znakiem minus, gdy $b < 1$.



Aby podnieść liczbę **do potęgi trzeciej**, poza skalą D, wykorzystujemy też skalę K, która jest podzielona na trzy jednakowe części. Ustawiamy naszą liczbę, za pomocą kreski okienka, na skali D, wynik odczytujemy pod kreską okienka na skali K. Ilość cyfr wyniku zależy od tego, w której części skali K znajduje się wynik. Jeżeli w prawej, ilość cyfr to potrojona ilość cyfr naszej liczby. Jeżeli w środkowej – potrojona ilość cyfr liczby minus 1. Jeżeli natomiast w lewej – potrojona ilość cyfr liczby minus 2.

Na koniec pokażemy, jak za pomocą suwaka logarytmicznego wyznaczać **pierwiastek trzeciego stopnia** z danej liczby. Tak jak w przypadku pierwiastka kwadratowego, najpierw dzielimy daną liczbę b na grupy – po trzy cyfry w lewo od przecinka, gdy $b > 1$, oraz po trzy cyfry w prawo od przecinka, gdy $b < 1$. Od tego podziału zależy, w której części skali K ustawimy naszą liczbę. Jeżeli skrajna lewa grupa ma tylko jedną cyfrę, ustawiamy b w lewej części skali K. Jeżeli dwie – w środkowej, jeżeli zaś trzy – w prawej. Wynik odczytujemy pod kreską okienka na skali D. Ilość cyfr pierwiastka sześciennego z liczby b jest równa ilości grup w przypadku, gdy $b > 1$, oraz ilości grup zerowych ze znakiem minus, gdy $b < 1$.



Oczywiście wykonywanie rachunków na suwaku logarytmicznym jest obarczone błędami, jednak dzięki dobrym własnościom skali logarytmicznej, są one akceptowalnie małe. Warto nadmienić, że skala logarytmiczna jako jedyna daje w przybliżeniu stały błąd względny odczytu. Ponadto dokładność rachunków zależy od długości skali suwaka, dokładności ustawienia i odczytania danej liczby oraz ilości działań, jakie zdecydowaliśmy się wykonać za pomocą suwaka łącznie (wówczas im mniej ustawień i odczytań liczb oraz przerzutów suwaka, tym dokładniejszy wynik końcowy).

Autorka tekstu: Klaudia Piwowarczyk
Autorka ilustracji: Adrianna Smolińska
Opracowano na podstawie: [5].

Bibliografia

[1] Archiwum Państwowe w Poznaniu Oddział w Gnieźnie, prace maturalne uczniów Państwowego Gimnazjum i Liceum Bolesława Chrobrego w Gnieźnie.

[2] Archiwum zakładowe Zespołu Szkół Ogólnokształcących i Zawodowych w Trzemesznie, prace egzaminacyjne uczniów Gimnazjum i Progimnazjum w Trzemesznie.

[3] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy Fizyki, Tomy 1-5*, PWN, Warszawa, wyd. 2, 2015.

[4] W. Wojtowicz, B. Bielecki, M. Czyżykowski, *Trygonometria dla klas X i XI*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

[5] W. Czapliński, *Rachunek Przybliżony*, rozdział XXVIII w: „Poradnik matematyczny", praca zbiorowa / pod redakcją I. Dziubińskiego i T. Świątkowskiego ; zespół autorski: R. Bartoszyński, W. Czapliński, I. Dziubiński, E. Kącki, M. Kolupa, E. Otto, T. Śródka, T. Świątkowski, W. Waliszewski, L. Włodarski.

[6] S. Domaradzki, K. Karpińska, *O egzaminie maturalnym z matematyki na obszarze zaboru pruskiego od XVIII do początku XX wieku* [w:] Antiquitates Matematicae vol. 11 (1) 2017, s. 157 – 201.

[7] E. Musiał, *Pisownia oraz wymowa nazw i oznaczeń jednostek miar.* Automatyka, Elektryka, Zakłócenia 5 (2014): 6-26.

[8] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2012

[9] Ordnung der Entlassungsprüfungen an den höheren Schulen, załacznik do pisma Privinzial Schul Kollegium z 11.06.1882 r., Archiwum Państwowe w Poznaniu Oddział w

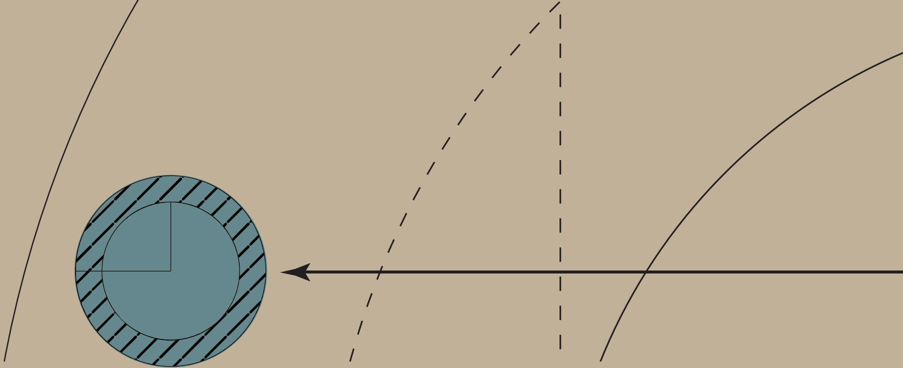
Gnieźnie, Państwowe Gimnazjum im. Bolesława Chrobrego w Gnieźnie, sygn. 380.

[10] Ordnung der Entlassungsprüfung an den Gymnasien. [w:] Ordnung der Entlassungsprüfungen an den höheren Schulen, cz. A, s. 1 - 10), Archiwum Państwowe w Poznaniu Oddział w Gnieźnie, Państwowe Gimnazjum Bolesława Chrobrego w Gnieźnie, sygn. 380.

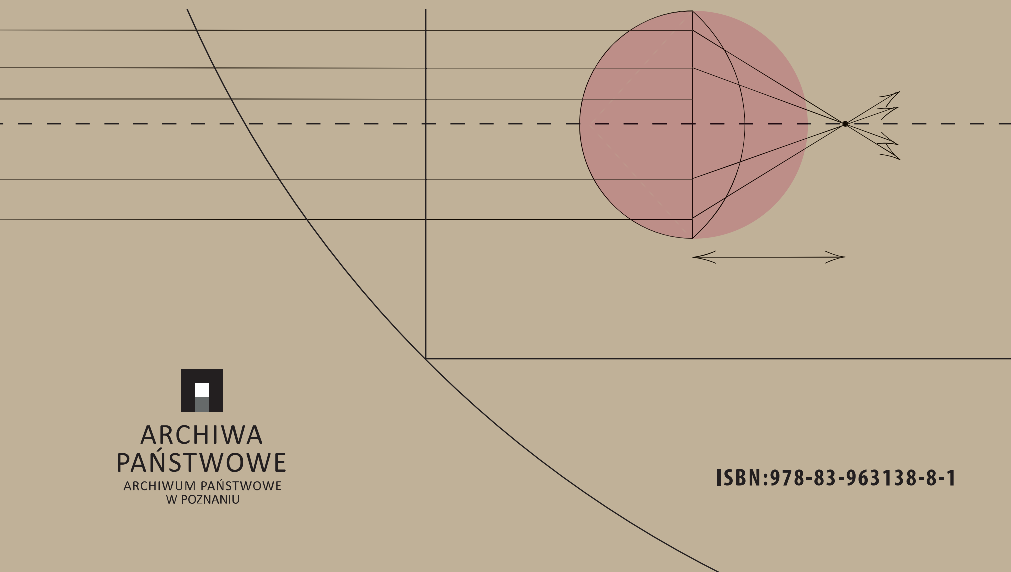
[11] B. Prus, *Faraon*, Wydawnictwo SBM, 14.3.2024

Źródła zdjęć:

- str. 9 – zdjęcia archiwalne w zbiorach I LO im. B. Chrobrego w Gnieźnie,
- str. 61 – strona `https://pl.wikipedia.org/wiki/Ksawery_Zakrzewski`,
- str. 67 – strona `http://www.swzygmunt.knc.pl`
- str. 131 – strona `https://pl.wikipedia.org/wiki/Pawe%C5%82_Cyms`,
- str. 152 – strona `http://www.wtg-gniazdo.org`,
- str. 198 – strona `http://www.wtg-gniazdo.org`,
- str. 192 – strona `https://pl.wikipedia.org/wiki/Zygmunt_Karpi%C5%84ski`,
- str. 211 – strona `https://www.booklooker.de`,
- str. 214 – strona `https://www.ricardo.ch`,



Niniejsza publikacja to zbiór rozwiązań wybranych zadań maturalnych z przełomu XIX i XX wieku z Państwowego Gimnazjum i Liceum Bolesława Chrobrego w Gnieźnie oraz gimnazjum w Trzemesznie. Pomysłodawcą projektu był dr Marek Szczepaniak z oddziału gnieźnieńskiego Archiwum Państwowego w Poznaniu, realizacji dokonali Studenci Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu - członkowie Koła Naukowego Matematyków, we współpracy z pracownikami Wydziału, pod opieką dr Jędrzeja Garnka oraz koordynacją studencką Adrianny Smolińskiej. Spośród zadań znajdujących się na kilkudziesięciu poszytach, wytypowaliśmy najciekawsze, obejmujące szerokie spektrum zagadnień matematyki, takich jak algebra, geometria planarna, stereometria oraz, obecnie rzadko stosowana, geometria sferyczna. Każdy z autorów, prezentując swój tok myślenia, starał się wprowadzić niezbędny kontekst teoretyczny tak, aby zawartość była przystępna dla czytelnika na każdym poziomie zaawansowania matematycznego. Publikacja przeznaczona jest dla nauczycieli matematyki, uczniów zainteresowanych Królową Nauk, a także dla wszystkich osób, które zastanawiają się, czy zdałyby maturę z dawnych czasów.



ARCHIWA PAŃSTWOWE
ARCHIWUM PAŃSTWOWE W POZNANIU

ISBN:978-83-963138-8-1